文章编号:1673-5005(2006)01-0154-03

分块矩阵特征值的圆盘估计

梁景伟

(中国石油大学 数理系,北京 102249)

摘要:在考虑非正规性因素影响下,对分块矩阵给出了复方阵特征值的整体圆盘估计,即给出复方阵的特征值相对于对角元素算术平均值的偏离程度的估计。

关键词:分块矩阵; 特征值; 圆盘估计

中图分类号:O 241.6　　**文献标识码**:A

A disc estimation for eigenvalues of a block matrix

LIANG Jing-wei

(*Department of Mathematics and Physics in China University of Petroleum*, *Beijing* 102249, *China*)

Abstract: Considering abnormal factors, a disc estimation for all eigenvalues of a block matrix was obtained, i.e., an estimation of deviation for any eigenvalue of a block matrix to arithmetic mean of its diagnoal elements was given.

Key words: block matrix; eigenvalue; disc estimation

1 问题的提出

本文中 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 表示所有 n 阶复方阵组成的集合,如果 $\boldsymbol{M}\in\mathbf{C}^{n\times n}$,则 $\mathrm{tr}\boldsymbol{M}$,$\mathrm{rank}\boldsymbol{M}$ 以及 $\|\boldsymbol{M}\|_F$ 分别表示 $\boldsymbol{M}$ 的迹、秩和 Frobinius 范数。如果 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^*=\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{M}$,则称 $\boldsymbol{M}$ 为正规矩阵,其中 $\boldsymbol{M}^*$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的共轭转置矩阵。

在特征值估计理论中,最著名的是 Gerschgorin 圆盘定理,该定理实际上给出了矩阵特征值偏离对角元素的一个良好又实用的估计,同时也有许多文献和著作对该定理给予了补充和改进[1]。除此之外,1994 年古以熹[2] 给出了任意复方阵的任一特征值相对于所有特征值的算术平均或相对于它的对角元素的算术平均的偏离估计。但是,他的研究结果没有体现矩阵非正规性对上述偏离估计的影响。笔者曾考虑非正规性因素影响,给出了更精确的估计[3],本文中则针对分块矩阵给出更好的估计。

2 主要结果

文献[2] 中给出了任意复方阵的任一特征值相对于所有特征值的算术平均或相对与它的对角元素的算术平均的偏离估计,即对于任一 n 阶方阵 $\boldsymbol{M}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 的所有特征值都位于如下单一圆盘中:

$$\boldsymbol{D}:\left\{z:\left|z-\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{M}}{n}\right|\leqslant r_1=\sqrt{\frac{n-1}{n}q}\right\}. \tag{1}$$

式(1) 的圆盘估计主要依赖于 Schur 不等式 $\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2\leqslant\|\boldsymbol{M}\|_F^2$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,L,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的特征值,$\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2$ 的上界估计越小,则圆盘的半径也越小,文献[4] 针对分块矩阵给出了一个半径更小的估计。

引理 1[4] 如果 $\boldsymbol{M}\in\mathbf{C}^{n\times n}$,任意给定 $1\leqslant k\leqslant n-1$,将 $\boldsymbol{M}$ 进行如下分块:

$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{k\times k}$,$\boldsymbol{D}\in\mathbf{C}^{(n-k)\times(n-k)}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{k\times(n-k)}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbf{C}^{(n-k)\times k}$,令

$$l_k=\|\boldsymbol{A}\|_F^2+\|\boldsymbol{D}\|_F^2+2\|\boldsymbol{B}\|_F\|\boldsymbol{C}\|_F, \tag{2}$$

则有

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{M}\geqslant\frac{1}{l_k}|\mathrm{tr}\boldsymbol{M}|^2. \tag{3}$$

定理 1 在引理 1 的条件下,分块矩阵 $\boldsymbol{M}=$

收稿日期:2005-06-25

作者简介:梁景伟(1963-),男(汉族),北京人,教授,博士,从事矩阵理论与计算方面的研究。

$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$的所有特征值位于如下的圆盘中:

$$D:\left\{z:\left|z-\frac{\mathrm{tr}M}{n}\right|\leqslant r=\sqrt{\frac{n-1}{n}\left(l_k-\frac{1}{n}|\mathrm{tr}M|^2\right)}\right\}. \tag{4}$$

其中

$l_k=\|A\|_F^2+\|D\|_F^2+2\|B\|_F\|C\|_F$.

证明　设 λ 为 M 的任一特征值,任取 $1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\lambda I-M=\begin{bmatrix}\lambda I_k-A & -B \\ -C & \lambda I_{n-k}-D\end{bmatrix},$$

且有 $\mathrm{rank}(\lambda I-M)\leqslant n-1$,由引理 1 的结果,将式(3) 中 M 用 $\lambda I-M$ 替换,则有

$$\mathrm{rank}(\lambda I-M)\geqslant\frac{1}{l_k(\lambda)}|\mathrm{tr}(\lambda I-M)|^2. \tag{5}$$

其中

$$l_k(\lambda)=\|\lambda I_k-A\|_F^2+\|\lambda I_{n-k}-D\|_F^2+2\|B\|_F\|C\|_F. \tag{6}$$

将式(5) 改写,则有

$|\mathrm{tr}(\lambda I-M)|^2\leqslant l_k(\lambda)\mathrm{rank}(\lambda I-M)$.

再由 $\mathrm{rank}(\lambda I-M)\leqslant n-1$,可得

$$|\mathrm{tr}(\lambda I-M)|^2\leqslant(n-1)l_k(\lambda). \tag{7}$$

式(7) 左边又可表示为

$|\mathrm{tr}(\lambda I-M)|^2=|n\lambda-\mathrm{tr}M|^2=$
$(n\lambda-\mathrm{tr}M)(n\lambda-\mathrm{tr}M)^*=$
$(n\lambda-\mathrm{tr}M)(n\bar\lambda-\mathrm{tr}M^*)=$
$n^2|\lambda|^2-n\lambda\mathrm{tr}M^*-n\bar\lambda\mathrm{tr}M+|\mathrm{tr}M|^2$;

式(7) 的右边又可表示为

$(n-1)l_k(\lambda)=(n-1)(\|\lambda I_k-A\|_F^2+\|\lambda I_{n-k}-D\|_F^2+2\|B\|_F\|C\|_F)=$
$(n-1)[\mathrm{tr}(\lambda I_k-A)(\lambda I_k-A)^*+\mathrm{tr}(\lambda I_{n-k}-D)(\lambda I_{n-k}-D)^*+2\|B\|_F\|C\|_F]=$
$(n-1)[\mathrm{tr}(|\lambda|^2I_k-\lambda A^*-\bar\lambda A+AA^*)+\mathrm{tr}(|\lambda|^2I_k-\lambda A^*-\bar\lambda A+AA^*)+2\|B\|_F\|C\|_F]=$
$(n-1)[k|\lambda|^2-\lambda\mathrm{tr}A^*-\bar\lambda\mathrm{tr}A+\|A\|_F^2+(n-k)|\lambda|^2-\lambda\mathrm{tr}D^*-\bar\lambda\mathrm{tr}D+\|D\|_F^2+2\|B\|_F\|C\|_F]$.

注意到 $\mathrm{tr}M=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}D$ 以及 $\mathrm{tr}M^*=\mathrm{tr}A^*+\mathrm{tr}D^*$,式(7) 的右边为 $(n-1)l_k(\lambda)=(n-1)[n|\lambda|^2-\lambda\mathrm{tr}M^*-\bar\lambda\mathrm{tr}M+l_k]$。于是由式(7) 可得

$n^2|\lambda|^2-n\lambda\mathrm{tr}M^*-n\bar\lambda\mathrm{tr}M+|\mathrm{tr}M|^2\leqslant$
$(n-1)[n|\lambda|^2-\lambda\mathrm{tr}M^*-\bar\lambda\mathrm{tr}M+l_k]$.

将其化简为

$n|\lambda|^2-\lambda\mathrm{tr}M^*-\bar\lambda\mathrm{tr}M\leqslant(n-1)l_k-|\mathrm{tr}M|^2$.

进一步化简并配方,则有

$$|\lambda|^2-\lambda\frac{\mathrm{tr}M^*}{n}-\bar\lambda\frac{\mathrm{tr}M}{n}+\frac{1}{n^2}|\mathrm{tr}M|^2\leqslant\frac{n-1}{n}l_k-\frac{n-1}{n^2}|\mathrm{tr}M|^2,$$

即

$$\left|\lambda-\frac{\mathrm{tr}M}{n}\right|^2\leqslant\frac{n-1}{n}\left(l_k-\frac{1}{n}|\mathrm{tr}M|^2\right).$$

对此不等式两边开方,则有

$$\left|\lambda-\frac{\mathrm{tr}M}{n}\right|\leqslant\sqrt{\frac{n-1}{n}\left(l_k-\frac{1}{n}|\mathrm{tr}M|^2\right)},$$

即分块矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$的所有特征值位于如下的圆盘中:

$$D:\left\{z:\left|z-\frac{\mathrm{tr}M}{n}\right|\leqslant r=\sqrt{\frac{n-1}{n}\left(l_k-\frac{1}{n}|\mathrm{tr}M|^2\right)}\right\}.$$

比较式(1) 与(4) 两边的半径,有 $r_1\leqslant r$。要想说明 $r_1\leqslant r$,只要证明 $l_k\leqslant\|M\|_F^2$ 即可。事实上,

$$\|M\|_F^2=\|A\|_F^2+\|D\|_F^2+\|B\|_F^2+\|C\|_F^2=l_k+(\|B\|_F-\|C\|_F)^2.$$

显然有 $l_k\leqslant\|M\|_F^2$,且等号成立的充分必要条件为 $\|B\|_F=\|C\|_F$。此结果说明 $\|B\|_F$ 与 $\|C\|_F$ 两者的差值越大,式(4) 估计的半径 r 比式(1) 估计的半径 r_1 越小,这说明本估计更适用于具有强非对称性的矩阵。另外,还需说明的是,在定理 1 中,k 的选择可以是满足 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 的任意正整数,为此可以适当选择 k,使 l_k 为其最小值。令 $l=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1}l_k$,则有下面的推论:

推论 1　在引理 1 的条件下,分块矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$的所有特征值位于如下的圆盘中:

$$D:\left\{z:\left|z-\frac{\mathrm{tr}M}{n}\right|\leqslant r=\sqrt{\frac{n-1}{n}\left(l_k-\frac{1}{n}|\mathrm{tr}M|^2\right)}\right\}. \tag{8}$$

3　应用实例

编写了 Matlab 程序,对任意输入的矩阵,给出最好的分块方法以及最小的估计半径并作出直观图形。设

$M=[9\ \ -1\ \ 0\ \ 2\ \ i\ \ 0\ \ 4;3\ \ 10\ \ -2\ \ i\ \ 2\ \ 0\ \ 3\ \ -1;0\ \ -1\ \ 8\ \ 0\ \ 2\ \ -1\ \ 2;2\ \ 3\ \ 0\ \ 19\ \ -1\ \ i+1\ \ 8;-3\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 7\ \ -1\ \ 19;-1\ \ 7\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ \ 30\ \ -1;1\ \ i+2\ \ 2\ \ -1\ \ 0\ \ 2\ \ 3]$,

对不同的分块 $k=1,2,3,4,5,6$ 分别计算出圆盘半径为

$r=30.6695,30.5681,30.5685,30.6565,28.2796,26.1730,$

$r_1=30.6701,30.6701,30.6701,30.6701,30.6701,30.6701.$

显然在 $k=6$ 时,式(4)圆盘 r 最小,而式(1)半径与 k 无关。有关矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值的分布及圆盘估计见图 1。

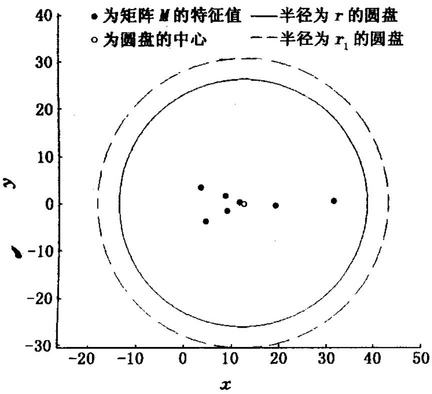

图 1　分块矩阵特征值的圆盘估计

参考文献:

[1] MARVIN Marcus, HENRYK Minc. A survey of matrix theory and matrix inequalities[M]. Boston: Allyn and Bacon, Inc, 1964:139-152.

[2] 古以熹.矩阵特征值的分布[J].应用数学学报,1994,17(4):55-58.
GU Yi-xi. The distribution of matrix eigenvalues[J]. Journal of Applied Mathemtics, 1994,17(4):55-58.

[3] 梁景伟.矩阵特征值的分布及其在数值分析中的应用[J].石油大学学报:自然科学版,2001,25(5):113-116.
LIANG Jing-wei. The distribution of matrix eigenvalues and its applications in numerical analysis[J]. Journal of the University of Petroleum, China(Edition of Natural Science), 2001,25(5):113-116.

[4] 蒋正新,施国梁.矩阵理论及其应用[M].北京:北京航空学院出版社,1988:99-102.

[5] 孙继广.矩阵扰动分析[M].北京:科学出版社,1987:154-163.

[6] ROGER A Horn, CHARLES R Johnson. Matrix analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985:352-353.

(编辑　修荣荣)

(上接第 149 页)

实现了主客观的统一,且随着样本量的增加,权重能够动态调整,因而赋权更加科学有效,具有一定的智能性。

参考文献:

[1] 财政部统计评价司.企业效绩评价工作指南[M].北京:经济科学出版社,2002.

[2] 秦寿康.综合评价原理与应用[M].北京:电子工业出版社,2003.

[3] 林齐宁.决策分析[M].北京:北京邮电大学出版社,2003.

[4] 陈雷,王延章.基于熵权系数与 TOPSIS 集成评价决策方法的研究[J].控制与决策,2003,18(4):456-459.
CHEN Lei, WANG Yan-zhang. Research on TOPSIS integrated evaluation and decision method based on entropy coefficient[J]. Control and Decision, 2003,18(4):456-459.

[5] 王才经.现代应用数学[M].东营:石油大学出版社,2004.

[6] 魏一鸣,童光煦,范体均.基于神经网络的多目标权重计算方法探讨[J].武汉化工学院学报,1995,17(4):37-41.
WEI Yi-ming, TONG Guang-xu, FAN Ti-jun. An investigation on neural network based method for computing the multi-object weight[J]. Journal of Wuhan Institute of Chemical Technology, 1995,17(4):37-41.

[7] 许东,吴铮.基于 MATLAB6.X 的系统分析与设计——神经网络[M].西安:西安电子科技大学出版社,2002.

(编辑　修荣荣)