文章编号:1673-5005(2006)03-0144-02

关于亚纯函数的惟一性

吕巍然[1], 董立华[2]

(1.中国石油大学 数学与计算科学学院,山东 东营 257061; 2.德州学院 数学系,山东 德州 253023)

摘要:应用权分担值的思想,讨论了涉及亚纯函数及其导数具有两个公共值的惟一性问题。得到的结果改进了 Fang M. 和 Hong W. 等人的有关定理。

关键词: 亚纯函数; 权分担值; 惟一性

中图分类号: O 174.52 **文献标识码**:A

Uniqueness of meromorphic functions

LÜ Wei-ran[1], DONG Li-hua[2]

(1. *College of Mathematics and Computational Science in China University of Petroleum*, *Dongying* 257061, *Shandong Province*, *China*; 2. *Department of Mathematics in Dezhou College*, *Dezhou* 253023, *Shandong Province*, *China*)

Abstract: The problem of uniqueness for meromorphic functions concerning differential polynomials sharing two values with some finite weighted was studied using the idea of weight-sharing value. The obtained results extend the theorems of Fang M. and Hong W., et al.

Key words: meromorphic function; weight-sharing value; uniqueness

1 问题的提出

本文中使用 Nevanlinna 值分布理论的标准术语和记号[1,2]:特征函数 $T(r,f)$, 均值函数 $m(r,f)$,精简计数函数 $\overline{N}(r,f)$等。对于复数 a,如果亚纯函数 f 和 g 具有相同的 a 值点,并且重数也相同(不计重数), 就称 f 和 g 分担 aCM(IM)。设 f 为非常数亚纯函数,用 $N_{1)}(r,\frac{1}{f-a})$表示 f 的单 a 值点的计数函数,用 $\overline{N}_{(k}(r,\frac{1}{f-a})$表示 f 的重级大于或者等于 k 的 a 值点的精简计数函数,这里 k 为正整数。此外,$N_2(r,\frac{1}{f-a})=\overline{N}(r,\frac{1}{f-a})+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f-a})$,$S(r,f)$表示任意满足 $S(r,f)=o(T(r,f))(r\to\infty, r\notin E)$的量,其中,$E$ 为测度有穷的 r 值集。

定理 A[3] 设 f 和 g 为超越整函数,$n\geqslant 11$ 为正整数。若 $f^n(f-1)f'$和$g^n(g-1)g'$分担 1 CM,则 $f\equiv g$。

自然提出以下问题: 保持定理 A 的结论, 分担 1 的条件是否可以减弱? 笔者的目的就是解决这一问题。为此, 需要引入权分担值的概念[4-6]。

定义 1 设 k 为非负整数或无穷大,对于复数 b,用 $E_k(b;f)$表示 f 所有 b 值点的集合,其中, 一个 m 重 b 值点在$E_k(b;f)$中计 $\min(m,k+1)$次。

定义 2 设 k 为非负整数或无穷大,如果对于复数 b,有 $E_k(b;f)=E_k(b;g)$,就称 f 和 g 以权 k 分担 b,记为 f 和 g 分担(b,k)。

显然,f 和 g 分担 b CM 当且仅当 f 和 g 分担(b,∞)。

笔者利用 Lahiri I. 引入的权分担值的思想[5],改进了定理 A,得到定理 1 和 2。

定理 1 设 f 和 g 为判别的非常数亚纯函数,分担(∞,∞)。如果 $f^n(f-1)f'$,$g^n(g-1)g'$分担$(1,2)$,则

收稿日期:2005-10-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371065);山东省自然科学基金资助项目(z2002A01)

作者简介:吕巍然(1962-), 男(汉族), 山东沾化人, 教授, 博士,研究方向为复分析。

万方数据

$$\begin{cases} f=\dfrac{(n+2)(1+h+\cdots+h^n)h}{(n+1)(1+h+\cdots+h^{n+1})}, \\ g=\dfrac{(n+2)(1+h+\cdots+h^n)}{(n+1)(1+h+\cdots+h^{n+1})}. \end{cases} \tag{1}$$

式中,$n\geqslant 10$ 为正整数;h 为非常数亚纯函数。

定理 2 设 f 和 g 为非常数整函数,$n\geqslant 7$ 为正整数。若 $f^n(f-1)f'$,$g^n(g-1)g'$ 分担(1,2),则 $f\equiv g$。

2 定理的证明

应用文献[5]或[7]中的方法可以证明引理 1。

引理 1 设 F 和 G 是非常数亚纯函数分担(∞,∞),(1,2),则 F 和 G 满足下列关系之一:

(i) $T(r)\leqslant N_2(r,\frac{1}{F})+N_2(r,\frac{1}{G})+2\overline{N}(r,F)+S(r,F)+S(r,G)$,

其中,$T(r)=\max\{T(r,F),T(r,G)\}$;

(ii) $FG\equiv 1$;

(iii) $F\equiv G$.

引理 2[8] 设 f 为亚纯函数,$p=a_0f^n+a_1f^{n-1}+\cdots+a_n$,其中 $a_0\not\equiv 0,a_1,\cdots,a_n$ 为 f 的小函数,则 $T(r,p)=nT(r,f)+S(r,f)$。

由第二基本定理[1,9],可得

引理 3 设 f_1,f_2 为非常数亚纯函数,c_1,c_2,c_3 为非零常数。若 $c_1f_1+c_2f_2=c_3$,则

$$T(r,f_1)<\overline{N}(r,\frac{1}{f_1})+\overline{N}(r,\frac{1}{f_2})+\overline{N}(r,f_1)+S(r,f_1).$$

2.1 定理 1 的证明

令

$$F=f^n(f-1)f',\ G=g^n(g-1)g', \tag{2}$$

及

$$\begin{cases} F_1=\dfrac{1}{n+2}f^{n+2}-\dfrac{1}{n+1}f^{n+1}, \\ G_1=\dfrac{1}{n+2}g^{n+2}-\dfrac{1}{n+1}g^{n+1}, \end{cases} \tag{3}$$

由定理的假设条件知 F 和 G 分担(∞,∞)和(1,2),因此,F 和 G 满足引理 1 中的 3 个关系之一。

情形 1 假若 F 和 G 满足引理 1 中的关系(i),由式(2)得

$$N_2(r,\frac{1}{F})+N_2(r,\frac{1}{G})\leqslant 2N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{f-1})+N(r,\frac{1}{f'})+2N(r,\frac{1}{g})+N(r,\frac{1}{g-1})+N(r,\frac{1}{g'}). \tag{4}$$

根据引理 2 和第一基本定理及式(3),得

$$T(r,F_1)=(n+2)T(r,f)+S(r,f)\leqslant T(r,F)+N(r,\frac{1}{F_1})-N(r,\frac{1}{F})+S(r,f)\leqslant T(r,F)+N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{f-\frac{n+2}{n+1}})-N(r,\frac{1}{f-1})-N(r,\frac{1}{f'})+S(r,f).$$

再根据引理 1 中关系(i)和式(4),得

$$(n+2)T(r,f)\leqslant 3N(r,\frac{1}{f})+N(r,\frac{1}{f-\frac{n+2}{n+1}})+2\overline{N}(r,f)+2N(r,\frac{1}{g})+N(r,\frac{1}{g-1})+N(r,\frac{1}{g'})+S(r,f)+S(r,g).$$

注意到 F 和 G 分担(∞,∞),则

$$(n-2)T(r,f)\leqslant 7T(r,g)+S(r,f)+S(r,g).$$

同理,得

$$(n-2)T(r,g)\leqslant 7T(r,f)+S(r,f)+S(r,g).$$

因此有

$$(n-9)T(r,f)+(n-9)T(r,g)\leqslant S(r,f)+S(r,g),$$

这与假设 $n\geqslant 10$ 不符。

情形 2 假若 F 和 G 满足引理 1 中的关系(ii)。注意到 f 和 g 分担(∞,∞),以及第二基本定理,得 $T(r,f)=S(r,f)$,矛盾。

情形 3 假若 F 和 G 满足引理 1 中的关系(iii),于是,$F_1\equiv G_1+c$,这里 c 为常数。首先,由引理 1,得

$$T(r,f)=T(r,g)+S(r,f). \tag{5}$$

下面证明 $c=0$。如果 $c\neq 0$,根据引理 3 以及式(3)和式(5),有

$$T(r,F_1)=(n+2)T(r,f)+S(r,f)\leqslant \overline{N}(r,\frac{1}{F_1})+\overline{N}(r,\frac{1}{G_1})+\overline{N}(r,f)+S(r,f)\leqslant 5T(r,f)+S(r,f),$$

这与 $n\geqslant 10$ 不符,从而 $c=0$,$F_1\equiv G_1$。再令 $f=hg$,注意到 f,g 判别,得

$$f=\frac{(n+2)(1+h+\cdots+h^n)h}{(n+1)(1+h+\cdots+h^{n+1})},$$

$$g=\frac{(n+2)(1+h+\cdots+h^n)}{(n+1)(1+h+\cdots+h^{n+1})},$$

式中,$n\geqslant 10$ 为正整数;h 为非常数亚纯函数。

2.2 定理 2 的证明

首先,注意到 f 和 g 为整函数,知 $N(r,f)=0$,$N(r,g)=0$。若 $f\not\equiv g$,类似于定理 1 的证明讨论如下 3 种情况。

(下转第 150 页)

万方数据

技术[J]. 中国海洋平台,2002,17(2):11-15.
FANG Yin-xia, JIN Xiang-long, LI Ming-bi. The exploration and development of gas hydrate[J]. China Offshore Platform,2002,17(2):11-15.

[11] ISLAM M R. A new recovery technique for gas production from Alaskan gas hydrates[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 1994,11: 267-281.

[12] 王达,庞馨萍,李常茂. 关于天然气水合物开发问题的思考[J]. 探矿工程,2000(4):1-3.
WANG Da, PANG Xin-ping, LI Chang-mao. Reflect on development of natural gas hydrate[J]. Exploration Engineering, 2000(4):1-3.

[13] HOLDER G D, ANGERT P K. Simulation of gas production from a reservoir containing both gas hydrates and free natural gas[R]. SPE 11105,1982.

[14] MCGUIRE P L. Recovery of gas from hydrate deposits using conventional technology[R]. SPE/DOE 10832, 1982.

[15] BURSHEARS M, OBRIEN T J, MALONE R D. A multi-phase, multi-dimensional, variable composition simulation of gas production from a conventional gas reservoir in contact with hydrates[R]. SPE 15246, 1986.

[16] SELIM M S, SLOAN E D. Hydrate dissociation in sediment[R]. SPE 16859,1990.

[17] YOUSIF M H, ABASS H H, SELLM M S, et al. Experimental and theoretical investigation of methane-gas-hydrate dissociation in porous media[R]. SPE 18320, 1991.

[18] SWINKELS Wim J A M, DRENTH Rik J J. Thermal reservoir simulation model of production from naturally occurring gas hydrate accumulations[R]. SPE 56550, 1999.

[19] MORIDIS G J. Numerical studies of gas production from methane hydrates[R]. SPE 75691,2002.

[20] MORIDIS G J. Numerical simulation studies of thermally-induced gas production from hydrate accumulations with no free gas zones at the Mallik site, Mackenzie Delta, Canada [R]. SPE 77861,2002.

[21] MORIDIS G J, COLLETT T S, DALLIMORE S R, et al. Numerical studies of gas production from several CH_4-hydrate zones at the Mallik site, Mackenzie Delta, Canada[R]. LBNL 50257,2002.

(编辑 李志芬)

(上接第 145 页)

情形 1 假若 F 和 G 满足引理 1 中的关系(i),得

$$(n-2)T(r,f)\leqslant 4T(r,g)+S(r,f)+S(r,g),$$

及

$$(n-2)T(r,g)\leqslant 4T(r,f)+S(r,f)+S(r,g),$$

这与 $n\geqslant 7$ 不符。

情形 2 假若 F 和 G 满足引理 1 中的关系(ii)。注意到 f 和 g 为整函数,这是不可能的。

情形 3 假若 F 和 G 满足引理 1 中的关系(iii),由定理 1 知

$$f=\frac{(n+2)(1+h+\cdots+h^n)h}{(n+1)(1+h+\cdots+h^{n+1})},$$

$$g=\frac{(n+2)(1+h+\cdots+h^n)}{(n+1)(1+h+\cdots+h^{n+1})},$$

式中,$n\geqslant 7$ 为正整数;h 为非常数亚纯函数。

再注意到 f 和 g 为整函数,矛盾。于是 $f\equiv g$。

参考文献:

[1] HAYMAN W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon, 1964.

[2] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995.

[3] FANG M, HONG W. A unicity theorem for entire functions concerning differential polynomials[J]. Indian J Pure Appl Math, 2001,32(9):1343-1348.

[4] LAHIRI I. Weighted sharing and uniqueness of meromorphic functions[J]. Nagoya Math J, 2001,161:193-206.

[5] LAHIRI I. Weighted value sharing and uniqueness of meromorphic functions[J]. Complex Variables, 2001, 46:241-253.

[6] 吕巍然,王珺. 具有三个公共值亚纯函数惟一性问题的注记[J]. 石油大学学报:自然科学版,2004,28(1):119-121.
LÜ Wei-ran, WANG Jun. Remarks on the problem of uniqueness of meromorphic functions sharing three values [J]. Journal of the University of Petroleum, China(Edition of Natural Science), 2004,28(1):119-121.

[7] LÜ Wei-ran, WANG Jun. Meromorphic functions sharing two values[J]. Northeast Math J, 2004,20(1):63-67.

[8] YANG C. On deficiencies of differential polynomials Ⅱ [J]. Math Z, 1972,125:107-112.

[9] 王清河,吕巍然. 具有五个公共值的亚纯函数[J]. 石油大学学报:自然科学版, 2004,28(4):141-143.
WANG Qing-he, LÜ Wei-ran. Uniqueness of meromorphic functions with five shared values[J]. Journal of the University of Petroleum, China(Edition of Natural Science), 2004,28(4):141-143.

(编辑 修荣荣)

万方数据