

文章编号:1673-5005(2007)01-0049-07

层状介质中计算体积分方程的弱化 BCGS-FFT 算法

魏宝君^{1,2}, LIU Q H²

(1. 中国石油大学 物理科学与技术学院, 山东 东营 257061;

2. Department of Electrical & Computer Engineering, Duke University, Durham, NC 27708, USA)

摘要:采用弱化稳定型双共轭梯度快速 Fourier 变换 (BCGS-FFT) 算法精确计算了层状介质中的体积分方程。采用递推矩阵方法计算层状介质中的并矢 Green 函数, 可以很方便地与体积分方程结合。将“屋顶”函数作为基函数和试探函数对体积分方程进行弱化离散, 从而有效地避免了体积分方程的奇异性。离散后的体积分方程采用稳定型双共轭梯度迭代方法进行求解, 从而得到异常体内电场的分布。假设异常体只分布在层状介质中的某一层介质内, 则体积分方程内并矢 Green 函数与对比源之间的乘积可表示为卷积或相关形式, 从而在每一次迭代过程中可以同时沿 x, y, z 方向采用快速 Fourier 变换技术加快运算速度。数值算例说明了该算法的精确性和有效性。

关键词:体积分方程; 弱化 BCGS-FFT 算法; 并矢 Green 函数; 层状介质; 电法测井

中图分类号: O 441.4

文献标识码: A

Weak-form BCGS-FFT algorithm for volume integral equations in stratified medium

WEI Bao-jun^{1,2}, LIU Q H²

(1. College of Physics Science and Technology in China University of Petroleum, Dongying 257061, Shandong Province, China;

2. Department of Electrical & Computer Engineering, Duke University, Durham, NC 27708, USA)

Abstract: The volume integral equations in stratified medium were accurately calculated by weak-form stabilized biconjugate-gradient fast Fourier transform (BCGS-FFT) algorithm. The dyadic Green's functions in stratified medium were calculated by recursive matrix method, which can be easily combined with the volume integral equations. The rooftop functions were chosen as basis function and testing function to get the weak-form discretization of the volume integral equations, thus the singularity can be circumvented. The discrete form of the volume integral equations was solved via the stabilized biconjugate-gradient iteration method, so that the distribution of the electric field within the inhomogeneous objects can be obtained. It is assumed that the inhomogeneous objects are only in one layer of the stratified medium, so that the product between the dyadic Green's function and the contrast source within the volume integral equations can be expressed in the form of convolution or correlation, which can be accelerated by adopting the fast Fourier transform in x, y and z directions during each iteration of BCGS. Numerical examples show the accuracy and efficiency of the algorithm.

Key words: volume integral equations; weak-form BCGS-FFT algorithm; dyadic Green's function; stratified medium; electric well-logging

模拟层状介质中具有任意形状的三维异常体产生的电磁散射是地球物理领域最具挑战性的研究课题之一, 其原因主要是由于背景地层的复杂和未知量数目的庞大。但由于其在地球物理探测、探雷及

环境监测等地下探测领域具有重要应用价值, 仍吸引了大量科技工作者从事该领域的研究。对于求解电磁散射问题的一般方法而言, 一种方法是求解偏微分方程, 如有限元素法 (FEM) 和有限差分法

收稿日期: 2006-04-10

基金项目: 美国国家科学基金项目 (CCR-0219528); 中国石油大学博士科研基金资助项目

作者简介: 魏宝君 (1969-), 男 (汉族), 山东临沂人, 副教授, 博士, 主要从事地球物理电磁场理论方法研究工作。

(FDM),该方法可以通过反演一个大型稀疏线性矩阵实现,其未知量分布在整个求解域。另一种方法是积分方程法如体积分方程法或面积分方程法,其未知量只分布在三维异常体内或异常体表面。传统的完全求解体积分方程的方法是矩量法(MoM)^[1],但该方法不适用于求解大尺度三维问题。P. Zwambon^[2]和Z. Q. Zhang^[3]在求解均匀介质中的体积分方程时分别采用共轭梯度快速 Fourier 变换(CG-FFT)和双共轭梯度快速 Fourier 变换(BCG-FFT)算法,使内存量和所需机时均减少,可用于求解大尺度三维问题。X. M. Xu 则采用稳定型双共轭梯度快速 Fourier 变换(BCGS-FFT)方法求解上述问题,迭代收敛速度更快,迭代更加稳定^[4]。X. M. Xu^[5]和X. Millard^[6]还采用BCGS-FFT方法求解层状介质中的体积分方程,可适用于三维异常体完全分布在层状介质中某一层介质内的情况。但由于所开发的并矢 Green 函数的限制,仅限于发射源和接收源均在最上层且发射源只能沿轴向的情况。笔者采用计算层状介质中并矢 Green 函数的递推矩阵方法,并将其与计算体积分方程的BCGS-FFT方法有机结合,以方便地计算当发射源在任意层和任意方向、接收点在任意层时散射电场的分量。

1 体积分方程

假设测量点分布在层状介质第 m 层的某个表面 S 上,而异常体分布在第 q 层的某个区域 D 内。第 q 层、第 m 层和异常体的复电导率分别为 $\tilde{\epsilon}_q$ 、 $\tilde{\epsilon}_m$ 和 $\tilde{\epsilon}$,它们均为相对介电系数和电导率的组合。例如,一个异常体的复电导率可表示为 $\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \epsilon_r - j\sigma/\omega$,其中 ϵ_r 为物体的相对介电系数, ϵ_0 为真空的电导率, σ 为物体的电导率, ω 为角频率。

体积分方程可表示为如下形式:

$$E_m^{scn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T) = j\omega \tilde{\epsilon}_q \int_D \mathbf{G}_{mq}^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}', \mathbf{r}_T) d\mathbf{r}', \mathbf{r} \in S; \quad (1)$$

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T) = E^{inc}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T) + (\kappa_q^2 + \nabla \nabla \cdot) \int_D \mathbf{G}_{qq}^{AJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \chi(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}', \mathbf{r}_T) d\mathbf{r}', \mathbf{r} \in D. \quad (2)$$

其中

$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{\epsilon}(\mathbf{r})}{\tilde{\epsilon}_q} - 1, \kappa_q^2 = \omega^2 \mu_q \tilde{\epsilon}_q.$$

式中, $\mathbf{G}_{mq}^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为 q 层中 $\mathbf{r}'$ 处的单位电流元在 m 层中观测点 $\mathbf{r}$ 处的电型并矢 Green 函数; $\chi(\mathbf{r})$ 为对比度; $\mathbf{G}_{qq}^{AJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为磁矢势并矢 Green 函数,表示当观测点 $\mathbf{r}$ 和源点 $\mathbf{r}'$ 均在第 q 层时单位电流元产生的磁

矢势; κ_q 为第 q 层中的波数; μ_q 为第 q 层的磁导率。

式(1)称为数据方程,由该式可计算观测点的散射电场。式(2)称为目标方程,该式是计算异常体内总场分布的第二类 Fredholm 积分方程。体积分方程的目的就是求解式(2)得到异常区域 D 内总电场的分布,从而由式(1)计算出 S 面上任一点的散射电场。需指出的是,为了避免奇异性,在式(2)中采用了 $\mathbf{G}_{qq}^{AJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 而不是 $\mathbf{G}_{qq}^{EJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$,并且对 $\mathbf{G}_{qq}^{AJ}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 的直接项采用了球平均(弱化)形式^[2]。

在计算体积分方程时并矢 Green 函数 $\mathbf{G}^{EJ}$ 和 $\mathbf{G}^{AJ}$ 的计算是非常重要的。本文中采用递推方法计算并矢 Green 函数中所有 Sommerfeld 积分的系数矩阵,该方法非常适合于与体积分方程结合。在改进的方法中,根据层界面处的连续性条件得到了 3 个系数矩阵方程组,分别对应于垂向单位电偶极子产生的 TM 波、水平方向单位电偶极子产生的 TE 波和 TM 波。这 3 个系数矩阵方程组可在形式上表示为

$$\mathbf{A}^V \mathbf{X}^V = \mathbf{S}^V, \mathbf{A}^{TE} \mathbf{X}^{TE} = \mathbf{S}^{TE}, \mathbf{A}^{TM} \mathbf{X}^{TM} = \mathbf{S}^{TM}.$$

式中, $\mathbf{A}^V, \mathbf{A}^{TE}, \mathbf{A}^{TM} \in \mathbf{C}^{2K \times 2K}$ 为系数矩阵; $\mathbf{X}^V, \mathbf{X}^{TE}, \mathbf{X}^{TM} \in \mathbf{C}^{2K \times 1}$ 为待定系数; $\mathbf{S}^V, \mathbf{S}^{TE}, \mathbf{S}^{TM} \in \mathbf{C}^{2K \times 1}$ 为源项; K 对应于层状介质的层数,此处层状介质的编号为 $0, 1, \dots, K$ 。这些方程组可用递推方法计算。通过求解这些系数矩阵方程组可以得到 Sommerfeld 积分的所有待定系数,而并矢 Green 函数的每一个分量只不过是这几个 Sommerfeld 积分的某种组合。由于这些 Sommerfeld 积分只依赖于 $\rho(\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2})$, z 和 z' ,并不直接依赖于 x, x', y 或 y' ,所以只须根据不同的 ρ, z 和 z' 预先计算和存储这些 Sommerfeld 积分,在计算并矢 Green 函数时只须将它们进行组合和插值即可,从而达到节约时间和内存的目的。在上述 3 个系数矩阵方程组中只须改变源项中元素的位置,就可以方便地计算出当源点和场点在任意层时的并矢 Green 函数。将新开发的并矢 Green 函数分别应用于数据方程和目标方程,就可以得到当发射源在任意层和任意方向、接收点在任意层时散射电场的分量。

2 计算体积分方程的BCGS-FFT算法

令 $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T)$, 将式(2)表示为如下形式:

$$E^{inc}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T) = \frac{D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T)}{\tilde{\epsilon}(\mathbf{r})} - (\kappa_q^2 + \nabla \nabla \cdot) \tilde{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T), \quad (3)$$

其中

$$\tilde{A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T) = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_q} \int_D G_{qq}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \tilde{\chi}(\mathbf{r}') D(\mathbf{r}', \mathbf{r}_T) d\mathbf{r}',$$

$$\tilde{\chi}(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \tilde{\varepsilon}_q}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})}.$$

假设异常体位于形状为立方体的区域 D 内, 区域 D 的尺寸为 $L_x \times L_y \times L_z$, 将区域 D 离散为 $M \times N \times P$ 个完全相同的立方体小单元, 每个单元在 x, y, z 方向的尺寸分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, 则其体积为 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, 其中心点坐标为

$$\mathbf{r}_{m,n,p} = (x_m, y_n, z_p) = [(m-0.5)\Delta x, (n-0.5)\Delta y, (p-0.5)\Delta z], m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N; p = 1, 2, \dots, P.$$

选择三维“屋顶”函数作为试探函数, 三维“屋顶”函数各分量定义为

$$\psi_{m,n,p}^{(x)}(x, y, z) = \Lambda\left(x - x_m + \frac{\Delta x}{2}; 2\Delta x\right) \times \prod(y - y_n; \Delta y) \prod(z - z_p; \Delta z), \quad (4)$$

$$\psi_{m,n,p}^{(y)}(x, y, z) = \Lambda\left(y - y_n + \frac{\Delta y}{2}; 2\Delta y\right) \times \prod(x - x_m; \Delta x) \prod(z - z_p; \Delta z), \quad (5)$$

$$\psi_{m,n,p}^{(z)}(x, y, z) = \Lambda\left(z - z_p + \frac{\Delta z}{2}; 2\Delta z\right) \times \prod(x - x_m; \Delta x) \prod(y - y_n; \Delta y). \quad (6)$$

其中

$$\Lambda(\eta; 2\Delta\eta) = \begin{cases} (\Delta\eta - |\eta|)/\Delta\eta, & -\Delta\eta \leq \eta < \Delta\eta; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\prod(\eta; \Delta\eta) = \begin{cases} 1, & -\Delta\eta/2 \leq \eta < \Delta\eta/2; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中, Λ 和 $\prod$ 分别为三角形基函数和脉冲基函数。

将式(4)~(6)分别作用于式(3)两侧并在区域 D 内积分, 得到

$$\int_D \psi_{m,n,p}^{(q)}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_q \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_D \psi_{m,n,p}^{(q)}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_q \cdot \frac{D(\mathbf{r})}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})} d\mathbf{r} - \kappa_q^2 \int_D \psi_{m,n,p}^{(q)}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_q \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_D [\nabla \cdot \psi_{m,n,p}^{(q)}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_q] [\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r})] d\mathbf{r}, \quad (7)$$

其中上角标 $q = x, y, z$ 。

选“屋顶”函数作为基函数, 分别将 $D(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r})$, $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ 的各分量在区域 D 内用基函数展开, 得到

$$D^{(q)}(\mathbf{r}) = \tilde{\varepsilon}_q \sum_{i,j,k} \tilde{D}_{i,j,k}^{(q)} \psi_{i,j,k}^{(q)}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in D; \quad (8)$$

$$\mathbf{E}^{\text{inc},(q)}(\mathbf{r}) = \sum_{i,j,k} \mathbf{E}_{i,j,k}^{\text{inc},(q)} \psi_{i,j,k}^{(q)}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in D; \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^{(q)}(\mathbf{r}) = \sum_{i,j,k} \tilde{\mathbf{A}}_{i,j,k}^{(q)} \psi_{i,j,k}^{(q)}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in D. \quad (10)$$

由三维“屋顶”函数的定义和式(8)~(10)可以看出, $\tilde{D}_{i,j,k}^{(q)}$, $\mathbf{E}_{i,j,k}^{\text{inc},(q)}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{i,j,k}^{(q)}$ 的值均定义在各单元沿 q 方向的表面中心处。

将式(8)~(10)代入式(7), 经推导得到下列弱化形式的体积分方程:

$$\begin{cases} e_{m,n,p}^{\text{inc},(x)} = \sum_{i=1}^3 (b_i^{(x)} \tilde{D}_{m+i-2,n,p}^{(x)} + c_i^{(x)} \tilde{\mathbf{A}}_{m+i-2,n,p}^{(x)}) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 t_{ij}^{(x)} \tilde{\mathbf{A}}_{m+i-2,n+j-1,p}^{(x)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 t_{ik}^{(x)} \tilde{\mathbf{A}}_{m+i-2,n,p+k-1}^{(x)}, \\ e_{m,n,p}^{\text{inc},(y)} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 t_{ji}^{(y)} \tilde{\mathbf{A}}_{m+i-1,n+j-2,p}^{(y)} + \sum_{j=1}^3 (b_j^{(y)} \tilde{D}_{m,n+j-2,p}^{(y)} + c_j^{(y)} \tilde{\mathbf{A}}_{m,n+j-2,p}^{(y)}) + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 t_{jk}^{(y)} \tilde{\mathbf{A}}_{m,n+j-2,p+k-1}^{(y)}, \\ e_{m,n,p}^{\text{inc},(z)} = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 t_{ki}^{(z)} \tilde{\mathbf{A}}_{m+i-1,n,p+k-2}^{(z)} + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 t_{kj}^{(z)} \tilde{\mathbf{A}}_{m,n+j-1,p+k-2}^{(z)} + \sum_{k=1}^3 (b_k^{(z)} \tilde{D}_{m,n,p+k-2}^{(z)} + c_k^{(z)} \tilde{\mathbf{A}}_{m,n,p+k-2}^{(z)}). \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$e_{m,n,p}^{\text{inc},(x)} = \frac{\Delta V}{6} [E_{m-1,n,p}^{\text{inc},(x)} + 4E_{m,n,p}^{\text{inc},(x)} + E_{m+1,n,p}^{\text{inc},(x)}],$$

$$e_{m,n,p}^{\text{inc},(y)} = \frac{\Delta V}{6} [E_{m,n-1,p}^{\text{inc},(y)} + 4E_{m,n,p}^{\text{inc},(y)} + E_{m,n+1,p}^{\text{inc},(y)}],$$

$$e_{m,n,p}^{\text{inc},(z)} = \frac{\Delta V}{6} [E_{m,n,p-1}^{\text{inc},(z)} + 4E_{m,n,p}^{\text{inc},(z)} + E_{m,n,p+1}^{\text{inc},(z)}].$$

式中, b, c, t 的表达式见文献[2]。

选择磁矢势并矢 Green 函数 $\mathbf{G}_{qq}^A$ 为如下形式^[7]:

$$\mathbf{G}_{qq}^A = \begin{pmatrix} G_{xx}^A & 0 & 0 \\ 0 & G_{yy}^A & 0 \\ G_{xz}^A & G_{zy}^A & G_{zz}^A \end{pmatrix},$$

并且有 $G_{xx}^A = G_{yy}^A$. 计算发现, 当观测点 $\mathbf{r}$ 和源点 $\mathbf{r}'$ 均 在第 q 层内时, $\mathbf{G}_{qq}^A$ 可以表示为两项之和, 即

$$\mathbf{G}_{qq}^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}_{qq}^{A(-)}(x-x', y-y', z-z') + \mathbf{G}_{qq}^{A(+)}(x-x', y-y', z+z'),$$

且 $\mathbf{G}_{qq}^{A(-)}$ 和 $\mathbf{G}_{qq}^{A(+)}$ 的 4 个非零分量可分别由 3 个独立的 Sommerfeld 积分组合得到。于是式(3)中 $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_T)$ 的分量式可表示为

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{m,n,p}^{(x)} &= \Delta V \sum_{m',n',p'} G_{xx}^{AJ(-)} (x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p - z_{p'}) \tilde{\chi}_{m',n',p'}^{(x)} \tilde{D}_{m',n',p'}^{(x)} + \\
 &\Delta V \sum_{m',n',p'} G_{xx}^{AJ(+)} (x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p + z_{p'}) \times \\
 &\tilde{\chi}_{m',n',p'}^{(x)} \tilde{D}_{m',n',p'}^{(x)}, \\
 \bar{A}_{m,n,p}^{(y)} &= \Delta V \sum_{m',n',p'} G_{xx}^{AJ(-)} (x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p - z_{p'}) \tilde{\chi}_{m',n',p'}^{(y)} \tilde{D}_{m',n',p'}^{(y)} + \\
 &\Delta V \sum_{m',n',p'} G_{xx}^{AJ(+)} (x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p + z_{p'}) \times \\
 &\tilde{\chi}_{m',n',p'}^{(y)} \tilde{D}_{m',n',p'}^{(y)}, \\
 \bar{A}_{m,n,p}^{(z)} &= \Delta V \sum_{m',n',p'} G_{xx}^{AJ(-)} (x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p - z_{p'}) \tilde{\chi}_{m',n',p'}^{(z)} \tilde{D}_{m',n',p'}^{(z)} + \\
 &\Delta V \sum_{m',n',p'} G_{xx}^{AJ(+)} (x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p + z_{p'}) \times \\
 &\tilde{\chi}_{m',n',p'}^{(z)} \tilde{D}_{m',n',p'}^{(z)} + \Delta V \sum_{m',n',p'} G_{yy}^{AJ(-)} (x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p - z_{p'}) \times \\
 &\tilde{\chi}_{m',n',p'}^{(y)} \tilde{D}_{m',n',p'}^{(y)} + \\
 &\Delta V \sum_{m',n',p'} G_{yy}^{AJ(+)} (x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p + z_{p'}) \times \\
 &\tilde{\chi}_{m',n',p'}^{(y)} \tilde{D}_{m',n',p'}^{(y)} + \\
 &\Delta V \sum_{m',n',p'} G_{zz}^{AJ(-)} (x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p - z_{p'}) \times \\
 &\tilde{\chi}_{m',n',p'}^{(z)} \tilde{D}_{m',n',p'}^{(z)} + \Delta V \sum_{m',n',p'} G_{zz}^{AJ(+)} (x_m - x_{m'}, y_n - y_{n'}, z_p + z_{p'}) \times \\
 &\tilde{\chi}_{m',n',p'}^{(z)} \tilde{D}_{m',n',p'}^{(z)}.
 \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\tilde{\chi}_{m,n,p}^{(x)} = \frac{\tilde{\chi}(\mathbf{r}_{m-1,n,p}) + \tilde{\chi}(\mathbf{r}_{m,n,p})}{2},$$

$$\tilde{\chi}_{m,n,p}^{(y)} = \frac{\tilde{\chi}(\mathbf{r}_{m,n-1,p}) + \tilde{\chi}(\mathbf{r}_{m,n,p})}{2},$$

$$\tilde{\chi}_{m,n,p}^{(z)} = \frac{\tilde{\chi}(\mathbf{r}_{m,n,p-1}) + \tilde{\chi}(\mathbf{r}_{m,n,p})}{2}.$$

式中并矢 Green 函数 $G_{qq}^{AJ(-)}$ 和 $G_{qq}^{AJ(+)}$ 与对比源项 $\tilde{\chi} \mathbf{D}$ 之间的乘积在 x, y 方向均可表示为褶积形式, 在 z 方向可分别表示为褶积与相关形式, 它们均可以采用快速 Fourier 变换 (FFT) 技术实现。这样, 计算体积分方程的速度可明显加快, 将 CPU 时间减少到 $O[(MNP) \log_2(MNP)]$, 将内存量减少到 $O[(MNP)]$ 。

考虑到式 (12), 可将式 (11) 表示为如下致密形式:

$$\mathcal{A}[\tilde{\mathbf{D}}] = \mathbf{e}^{\text{inc}}, \quad (13)$$

式中, $\mathcal{A}$ 为线性算子, $\tilde{\mathbf{D}}$ 为代表未知电通量密度的矢

量; $\mathbf{e}^{\text{inc}}$ 为代表入射电场的矢量。它们的值均定义在各单元的表面中心处。式 (13) 可用 BCGS 方法进行迭代求解^[8], 从而得到 $\tilde{\mathbf{D}}$ 并进而得到电场强度在异常区域内的分布。求解式 (13) 时给定任意初始猜测值 $\tilde{\mathbf{D}}_0$ (例如 $\tilde{\mathbf{D}}_0 = 0$), 并计算下列残差:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{e}^{\text{inc}} - \mathcal{A}[\tilde{\mathbf{D}}_0],$$

$$\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1,$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{p}_0 = 0.$$

选择任一矢量 $\hat{\mathbf{r}}_0$ 满足 $(\hat{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_0) \neq 0$, 比如 $\hat{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_0$, 第 i 步的迭代顺序为

$$\rho_i(\hat{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_{i-1}), \beta = (\rho_i/\rho_{i-1})(\alpha/\omega_{i-1}),$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_{i-1} + \beta(\mathbf{p}_{i-1} - \omega_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}),$$

$$\mathbf{v}_i = \mathcal{A}[\mathbf{p}_i], \alpha = \rho_i/(\hat{\mathbf{r}}_0, \mathbf{v}_i), \mathbf{s} = \mathbf{r}_{i-1} - \alpha\mathbf{v}_i,$$

$$\mathbf{t} = \mathcal{A}[\mathbf{s}], \omega_i = (\mathbf{t}, \mathbf{s})/(\mathbf{t}, \mathbf{t}),$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_i = \tilde{\mathbf{D}}_{i-1} + \alpha\mathbf{p}_i + \omega_i\mathbf{s}, \mathbf{r}_i = \mathbf{s} - \omega_i\mathbf{t}.$$

当 $\|\mathbf{s}\|/\|\mathbf{e}^{\text{inc}}\|$ 或 $\|\mathbf{r}_i\|/\|\mathbf{e}^{\text{inc}}\|$ 小于给定的误差标准时, 迭代终止。

3 数值算例

在本文的模型中均假设背景介质和异常体是非磁性的。模型 1 (图 1(a)) 为自由空间中的两层介质球模型, 入射电场为沿 x 方向振动、沿 z 方向传播的平面波, 频率为 100 MHz。介质球内层半径 $a_1 = 7.5$ cm, 电性参数为 $\epsilon_{r1} = 72, \sigma_1 = 0.9$ S/m, 外层半径 $a_2 = 15$ cm, 电性参数为 $\epsilon_{r2} = 7.5, \sigma_2 = 0.05$ S/m。该模型可以通过 Mie 级数得到解析解。将包围介质球的正方体分别划分为 $31 \times 31 \times 31, 63 \times 63 \times 63$ 和 $93 \times 93 \times 93$ 个小单元并用 BCGS-FFT 求解。图 1(b) ~ (d) 给出了电场强度不同分量沿过球中心线不同方向的分布。由图 1 可以看出, BCGS-FFT 的计算结果与解析解的结果是一致的, 且小单元数目越多, BCGS-FFT 的结果越精确。本文方法对模型 1 的计算结果优于文献 [2] 的计算结果, 与文献 [3] 的计算结果一致。

模型 2 (图 2(a)) 为均匀介质中的介质球模型, 发射源为沿 z 方向的单位磁偶极子源, 位置坐标为 $(0, 0, -15$ cm), 频率为 800 MHz。介质球半径 $a = 6.4$ cm, 介质球电性参数为 $\epsilon_r = 50, \sigma = 0.2$ S/m, 背景层电性参数为 $\epsilon_{rb} = 16, \sigma_b = 0.1$ S/m。该模型亦可通过 Mie 级数得到解析解。将包围介质球的正方体划分为 $93 \times 93 \times 93$ 个小单元并用 BCGS-FFT 求解, 图 2(b) 为 E_z 的实分量和虚分量沿过球中心线 x 轴的分布。由图 2(b) 可以看出 BCGS-FFT 的计算结果与解析解的结果完全一致。尽管该模型所划分的

小单元数目非常大,但用 BCGS-FFT 仍可以求解,这

个数目对矩量法是不可想象的。

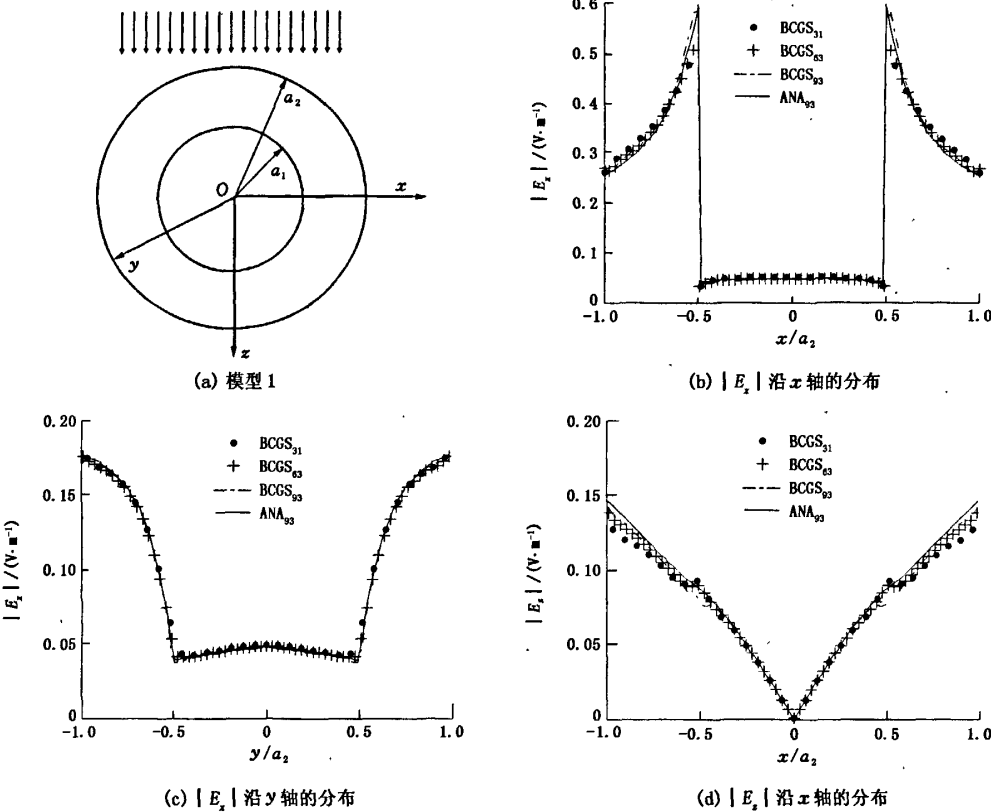


图 1 模型 1 BCGS-FFT 与解析解结果的对比 (图标中的下角标表示小单元在各方向的数目)

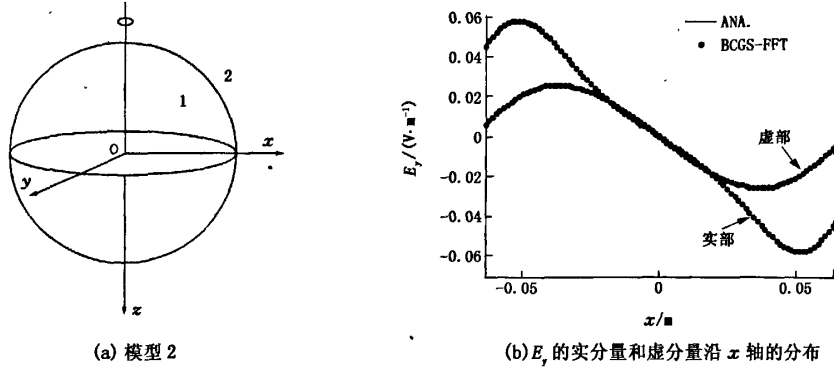
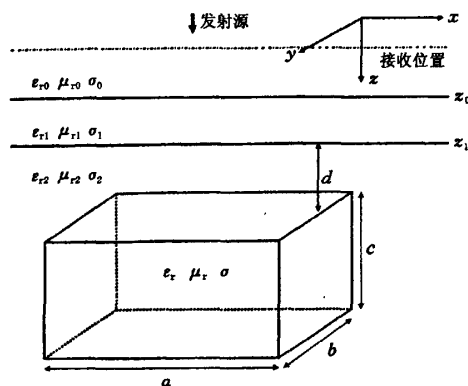


图 2 模型 2 BCGS-FFT 与解析解结果的对比

模型 3(图 3(a)) 为位于 3 层介质最底层的均匀立方体模型。0 ~ 1 层及立方体的电参数(ϵ_r, σ)分别为(1,0)、(1.21,0)、(1.44,0)和(9,1),层界面位置为 $z_0 = 0.0$ m、 $z_1 = 0.5$ m,发射源为沿 z 方向的单位电偶极子源,位置坐标为(2.1 m, -2.1 m, -0.425 m),频率为 100 MHz。立方体尺寸为 $a = b = 1.6$ m, $c = 1.15$ m,距离层界面 z_1 为 $d = 0.35$ m,

中心位置坐标为(2.05 m, -2.05 m, 1.425 m),划分的小单元数目为 $64 \times 64 \times 46$ 。该模型背景层为非耗散介质,异常体与背景层相对介电系数的对比度较高。该模型的异常体是高导电性的,从而导致电场在异常体内快速衰减。采用 BCGS-FFT 算法计算该模型并与时域有限差分(FDTD)^[9]经 Fourier 变换后的结果进行对比。图 3(b) 为(y, z) 等于(-1.9

m, 1.125 m) 处异常体内归一化总电场 $|E_x|$ 沿 x 轴的分布, 图 3(c) 为 (y, z) 等于 $(-1.9 \text{ m}, -0.175 \text{ m})$ 处的归一化散射电场 $|E_x^{\text{scat}}|$ 沿 x 轴的分布。此处的归一化系数取入射电场在异常体内沿 (y, z) 等于 $(-1.9 \text{ m}, 1.125 \text{ m})$ 处的最大值。由图 3 可看出, BCGS-FFT 与 FDTD 的计算结果是一致的。



(a) 模型 3

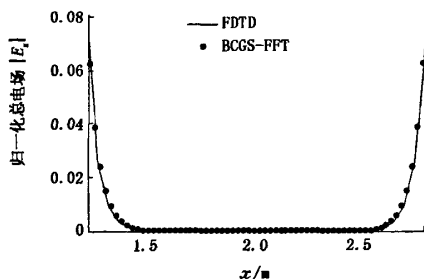
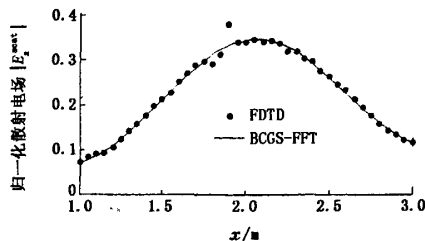
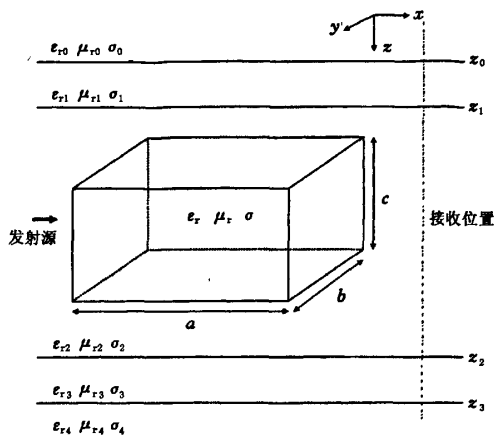
(b) $|E_x|$ 沿 x 轴的分布(c) $|E_x^{\text{scat}}|$ 沿 x 轴的分布

图 3 模型 3 BCGS-FFT 与 FDTD 计算结果的对比

模型 4(图 4(a)) 为位于 5 层介质中间层的均匀立方体模型。0 ~ 4 层及立方体的电参数 (ϵ, σ) 分别为 $(1, 0)$, $(1.21, 0)$, $(1.44, 0)$, $(1.21, 0)$, $(1, 0)$ 和 $(9, 0.02)$, 层界面位置为 $z_0 = 0.0 \text{ m}$, $z_1 = 0.5 \text{ m}$, $z_2 = 2.35 \text{ m}$, $z_3 = 2.85 \text{ m}$, 发射源为沿 x 方向的单位电偶极子源, 位置坐标为 $(1.0 \text{ m}, -2.05 \text{ m}, 1.425 \text{ m})$, 频率为 100 MHz 。立方体尺寸为 $a = b = 1.6 \text{ m}$, $c = 1.15 \text{ m}$, 中心位置坐标为 $(2.05 \text{ m}, -2.05 \text{ m},$

1.425 m), 划分的小单元数目为 $64 \times 64 \times 46$ 。



(a) 模型 4

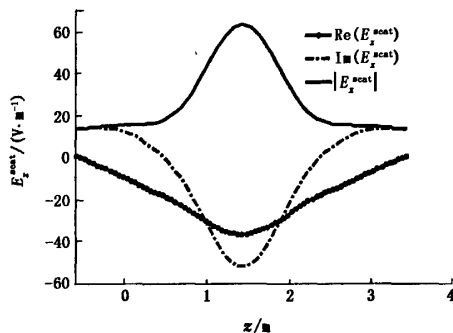
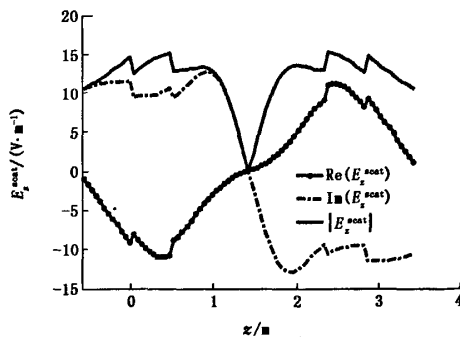
(b) E_x^{scat} 沿 z 轴的分布(c) E_z^{scat} 沿 z 轴的分布

图 4 模型 4 BCGS-FFT 的计算结果

该模型相对于立方体中心在 z 轴方向完全对称且发射源位于 y, z 轴方向中心处。图 4(b) 和 (c) 为 (x, y) 等于 $(3.1 \text{ m}, -2.05 \text{ m})$ 处散射电场 x 分量和 z 分量沿 z 轴的分布。对这种模型文献[5, 6]是不能计算的。由图 4 可以看出, 散射电场 x 分量沿 z 轴是对称的且连续, 这恰好满足电场切向分量过介质界面连续和模型沿 z 轴方向对称的特征。散射电场 z 分

量沿 z 轴是反对称的,且由于不同背景介质的电参数不同,该分量在背景介质界面处出现突变,但其变化量满足 ε, E_z^{inc} 连续。

4 结束语

将新开发的计算层状介质中并矢Green函数的递推矩阵方法与体积分方程相结合,用于计算层状介质中具有任意形状的3维物体的电磁散射问题。在求解体积分方程时将“屋顶”函数作为基函数和试探函数对其进行弱化离散,从而有效地避免了体积分方程的奇异性。离散后的体积分方程采用稳定型双共轭梯度迭代方法进行求解,而在每一次迭代过程中可以同时 x, y, z 方向采用快速Fourier变换技术加快运算速度,从而得到异常体内电场的分布,并进而得到接收位置处的散射电场。数值算例说明了本文算法的精确性和有效性。

参考文献:

- [1] WANNAMAKER P E, HOHMANN G W and SANFILIPPO W A. Electromagnetic modeling of three-dimensional bodies in layered earths using integral equations[J]. Geophysics, 1984, 49(1): 60-74.
- [2] ZWAMBORN P and van den BERG P M. The three-dimensional weak form of the conjugate gradient FFT method for solving scattering problems[J]. IEEE Trans Microwave Theory and Tech, 1992, 40(9): 1757-1766.
- [3] ZHANG Z Q and LIU Q H. Three-dimensional weak-form

conjugate- and biconjugate-gradient FFT methods for volume integral equations[J]. Microwave Opt Technol Lett, 2001, 29(5): 350-356.

- [4] XU X M, LIU Q H and ZHANG Z Q. The stabilized bi-conjugate-gradient fast Fourier transform method for electromagnetic scattering[J]. J Appl Comput Electromagn Soc, 2002, 17(1): 97-103.
- [5] XU X M and LIU Q H. The BCGS-FFT method for electromagnetic scattering from inhomogeneous objects in a planarly layered medium[J]. IEEE Antennas Wireless Propagat Lett, 2002, 1(1): 77-80.
- [6] MILLARD X and LIU Q H. Simulation of near-surface detection of objects in layered media by the BCGS-FFT method[J]. IEEE Trans Geosci Remote Sensing, 2004, 42(2): 327-334.
- [7] MICHALSKI K A and ZHENG D. Electromagnetic scattering and radiation by surface of arbitrary shape in layered media, part I: theory[J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1990, 38: 335-344.
- [8] van der VORST H A. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems[J]. SIAM J Sci Statist Comput, 1992, 13: 631-644.
- [9] LIU Q H. An FDTD algorithm with perfectly matched layers for conductive media[J]. Microwave Opt Technol Lett, 1997, 14(2): 134-137.

(编辑 修荣荣)

(上接第48页)

(4) 当套管厚度增加到一定值时,不同岩性能谱曲线在光电效应区的差别非常小,因此,在套管井中密度测井仪器将难以正确识别地层的岩性。

参考文献:

- [1] COSENTINE L, SPOTTI G. Reevaluation of hydrocarbon reserves in old fields through cased hole interpretation: a new approach[R]. SPE 22345, 1992.
- [2] WOLOT D S, VITTACHI A. Through casing formation density measurements using a gamma-gamma density tool [C]//Society of Professional Well Log Analysis, 2nd International Well Logging Symposium Transactions, 1994: 279-295.
- [3] QUINT E. Monitoring contact movement during depressur-

ization of the Brent field[R]. SPE 56951, 1999.

- [4] MOAKE G L. Design of a cased-hole-density logging tool using laboratory measurements[R]. SPE 49226, 1998.
 - [5] EYI K A, CHAPPELLAT H, CHEVALIER P, et al. High-resolution density logging using a three detector device [R]. SPE 28407, 1994.
 - [6] 黄隆基. 放射性测井原理[M]. 北京:石油工业出版社, 1985: 81-94.
 - [7] 吴文圣, 黄隆基. 三探测器密度测井的 Monte Carlo 模拟[J]. 地球物理学报, 2004, 47(1): 164-170.
- WU Wen-sheng, HUANG Long-ji. Monte Carlo simulation of three-detector density logging[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2004, 47(1): 164-170.

(编辑 刘艳荣)