文章编号:1673-5005(2007)01-0095-05

基于节点敏感性分析的无网格法节点布置研究

署恒木, 黄朝琴

(中国石油大学 储运与建筑工程学院,山东 东营 257061)

摘要:在应用无网格法进行数值计算时,由于节点的布置对于计算结果的精度有直接影响,因此节点布置方案以及节点性态特点是无网格法中的研究重点。把有限元和形状优化设计中的节点敏感性这一概念应用于无网格法,选择势能密度作为响应变量对无网格法中的节点进行敏感性分析,得到了节点布置方案与节点敏感性系数之间的关系。通过悬臂梁的数值算例,说明了该方法能够有效地指导并改进节点布置方案,使计算精度明显提高。

关键词:无网格法; 移动最小二乘法; 节点敏感性系数; 响应变量; 节点布置

中图分类号:O 31 文献标识码:A

Study of meshless nodes distribution on the basis of nodal sensitivities analysis

SHU Heng-mu, HUANG Zhao-qin

(*College of Transport & Storage and Civil Engineering in China University of Petroleum, Dongying* 257061, *Shandong Province, China*)

Abstract: In the meshless numerical calculation, nodes distribution directly affects the precision of meshless method. So nodes distribution and characters of nodes are emphasis and difficulty of meshless method. On the basis of nodal sensitivities in finite element method and shape optimization, the sensitivity analysis was used to study nodal arranging scheme in meshless method. By choosing potential energy density as response quantities, calculating nodal sensitivities modulus, the relation between sensitivity modulus and nodal distribution scheme was gotten. The case was given. The results show that the meshless method can guide and improve the nodal distribution scheme effectively. The precision of the calculation was improved.

Key words: meshless method; moving least-square method; nodal sensitivities modulus; response quantities; nodes distribution

近年来,无网格法已成为计算力学领域的一个研究热点,它不需要划分网格,只利用一些离散的节点信息来进行数值计算,消除了传统数值计算方法如有限元法、有限差分法、有限体积法中由于网格划分给计算带来的不便。无网格法面临的首要问题是节点的布置。LIU W K 基于再生核粒子法提出了节点分布、节点密度参数[1],定义了容许的粒子分布,但没有对任意节点的性态以及容许粒子分布作更进一步的研究;Sussman 和 Bathe 为了改进有限元网格,研究了在外载荷不变的情况下节点位置坐标发生微小变化时变形体势能的变化趋势;并把势能对节点位置坐标的梯度定义为敏感性系数,从而提出了节点坐标位置的优化方法[2]。Henneberger[3] 等在应用电磁场的有限元方法中给出了响应变量对节点位置坐标的敏感性;Wang 等人[4] 和 Paulino 等人[5]分别给出了有限元和边界元节点敏感性分析的详细评述;张钧强和罗先启[6]把位移作为响应变量应用到无网格法中进行敏感性分析,他们在应用无网格法求解线弹性力学问题时,简单地把位移作为响应变量进行了敏感性分析。笔者认为,只把位移作为响应量不能完全反映节点对误差的敏感性,因为在整个求解域上有应力、应变和位移 3 个相关

收稿日期:2006-05-08

作者简介:署恒木(1957-),男(汉族),山东东阿人,教授,主要从事工程力学的教学与科研工作。

万方数据

变量。因此笔者将势能作为响应变量,得到相应的敏感系数,并给出节点布置的改进方案。把该分析方法应用于悬臂梁问题,给出具体的节点优化方案,并通过数值计算验证该方法的有效性。

1 无网格法基本原理

如果采用移动最小二乘法[7]来构造近似函数,并且采用最小二乘加权余量法得到微分方程的等效形式[8],则称这种方法为加权最小二乘无网格法[9]。

1.1 移动最小二乘法

在分析域 Ω 内有函数 $u(\boldsymbol{x})$ 以及一组随机分布的离散节点 $\boldsymbol{x}_i(i=1,2,\cdots,n)$,用 Ω_i 表示节点 $\boldsymbol{x}_i$ 的紧支域(也称作节点 $\boldsymbol{x}_i$ 的影响域),二维问题中紧支域常为圆盘形(或矩形)。使用 MLS(Moving least-square) 进行全局近似,对任意的 $\boldsymbol{x}\in\Omega$,有

$$u^h(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{m} p_i(\bar{\boldsymbol{x}})a_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{x}}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}$ 是计算点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 Ω_x 内各点的空间坐标;$u^h(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})$ 或 $u^h(\boldsymbol{x})$ 是函数 $u(\boldsymbol{x})$ 的近似表达式;$p_i(\boldsymbol{x})$ 为基函数;m 为基函数的项数;$a_i(\boldsymbol{x})$ 为相应的系数。

对于二维问题常用的是线性基和平方基。线性基为

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = [1,x,y],m=3; \tag{2}$$

平方基为

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}}) = [1,x,y,xy,x^2,y^2],\ m=6. \tag{3}$$

系数 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ 不是常数,而是由空间坐标 x 的函数通过对适合于局部近似的加权最小二乘得到。

设计算点 $\boldsymbol{x}_I$ 的邻域 Ω_I 包括 N 个节点(计算点包括节点和其他辅助节点),近似函数在 $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}_I$ 的误差的加权平方和为

$$J = \sum_{I}^{N}\omega_I(\boldsymbol{x})[u^h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_I) - u(\boldsymbol{x}_I)]^2 = \sum_{I}^{N}\omega_I(\boldsymbol{x})[\sum_{i=1}^{m}p_i(\boldsymbol{x}_I)a_i(\boldsymbol{x}) - u_I]^2. \tag{4}$$

式中,$\omega(\boldsymbol{x})$ 为紧支域的权函数。

对 $J(\boldsymbol{x})$ 取最小值可求得系数 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ 为

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{N}\omega_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I)\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_I) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{N}\omega_I(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}_I(\boldsymbol{x}_I) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) = [\omega_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_1)\ \omega_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_2)\ \cdots\ \omega_N(\boldsymbol{x})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_N)].$$

将式(5) 代入式(1) 中得

$$u^h(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}_I\boldsymbol{u}_I, \tag{6}$$

其中形函数

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}). \tag{7}$$

对式(7) 求导,可得到形函数的一阶和二阶导数为

$$\boldsymbol{N}^k_{,i} = \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{,i}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{,i}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{N}^k_{,ij} = \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{,ij}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{,i}\boldsymbol{B}_{,j} + \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{,j}\boldsymbol{B}_{,i} + \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{,ij}. \tag{9}$$

其中,$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{p}$。

权函数是 MLS 近似中的重要组成部分,其选择目前还没有理论上的具体规则,带有某种任意性,本文中采取的是四次样条函数,它是 $C^2(\Omega)$ 连续函数式

$$\omega(r) = \begin{cases}1-6r^2+8r^3-3r^4, & r\leqslant 1;\\ 0, & r>1.\end{cases} \tag{10}$$

式中,$r=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I\|/d_{mI}$。

影响域对模拟的精度和计算量有直接的关系,影响域半径取为 $d_{mI}=\beta\times s[k]$(下例中 β 取为 2.0,k 取为 9),其中 $s[k]$ 为节点 I 与距其最近的第 k 个节点之间的距离,β 是大于 1 的乘子。

1.2 最小二乘无网格法

最小二乘法可以用来求解具有任何类型偏微分方程的问题,从变分原理和加权残量法上讲这类方法是直接使用最小二乘法(又称作残量平方泛函的极值原理)来建立泛函的,并且其权函数就是残量本身。首先令 $I=\int_\Omega \boldsymbol{R}^2\mathrm{d}\Omega=0$,再取最小值,即

$$\frac{\partial I}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j}\int_\Omega \boldsymbol{R}^2\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega 2\boldsymbol{R}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u_j}\mathrm{d}\Omega = 0. \tag{11}$$

因此有

$$\int_\Omega \boldsymbol{R}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u_j}\mathrm{d}\Omega = 0.$$

可以看到,最小二乘法中的检验函数为 $W_j=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial u_j}$。对具体问题采用上述积分格式的离散点求和形式便得到了加权最小二乘无网格法,详细阐述可参考文献[9]。

2 节点敏感性分析理论

在计算力学中,节点敏感性是作为误差表示和估计出现的,其定义是响应变量对节点位置的变化率,这里的响应变量定义为与节点位置相关的场变量,可以是位移、力、应力或温度等各种变量。

在无网格法中试函数是紧支的,可假设某计算区域为 Ω,在发生微小虚位移后变为 Ω_T,$x=T(x,$

万方数据

$x_T)$,$\Omega = T(\Omega,\Omega_T)$,$J$ 为转换函数 T 的雅可比矩阵,如图1所示。

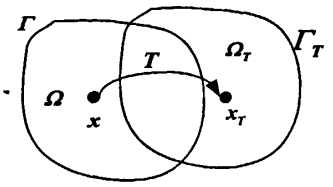

图1　计算区域变化

位移场中势能用 Π_p 表示,在该求解域内布置有 N 个节点,其中第 i 节点(以二维坐标为例)坐标为 (x_i,y_i),$i = 1,2,\cdots,N$,则在笛卡尔坐标系中 Π_p 可以表示如下:

$$\Pi_p = \frac{1}{2}\int_{\Omega_T}\sigma_{ij}(\bar{x})\varepsilon_{ij}(\bar{x}_T)\mathrm{d}\Omega_T - \int_{\Omega_T}f_i(\bar{x})u_{ij}(\bar{x}_T)\mathrm{d}\Omega_T - \int_{\Gamma_T}t_{ij}(\bar{x})u_{ij}(\bar{x}_T)\mathrm{d}\Gamma_T = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\sigma_{ij}(\bar{x})\varepsilon_{ij}(\bar{x}_T)\,|J|\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega}f_i(\bar{x})u_{ij}(\bar{x}_T)\,|J|\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma}t_{ij}(\bar{x})u_{ij}(\bar{x}_T)\,|J|\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{12}$$

其中,$\bar{x} = [x,y]^{\mathrm{T}}$。

为了避免积分把上式写成节点的能量密度离散形式,并考虑到虚位移是微小量,可得

$$\Pi_p^* = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N}\sigma_{ij}(\bar{x}_s)\varepsilon_{ij}(\bar{x}_{sT}) - \sum_{s=1}^{N}f_i(\bar{x}_s)u_{ij}(\bar{x}_{sT}) - \sum_{s=1}^{N_t}t_{ij}(\bar{x}_s)u_{ij}(\bar{x}_{sT}) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N}\sigma_{ij}(\bar{x}_s)\varepsilon_{ij}(\bar{x}_{sT})\,|J| - \sum_{s=1}^{N}f_i(\bar{x}_s)u_{ij}(\bar{x}_{sT})\,|J| - \sum_{s=1}^{N_t}t_{ij}(\bar{x}_s)u_{ij}(\bar{x}_{sT})\,|J| = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N}\sigma_{ij}(\bar{x}_s)\varepsilon_{ij}(\bar{x}_s) - \sum_{s=1}^{N}f_i(\bar{x}_s)u_{ij}(\bar{x}_s) - \sum_{s=1}^{N_t}t_{ij}(\bar{x}_s)u_{ij}(\bar{x}_s). \tag{13}$$

其中,N_t 为自然边界点数。由弹性力学可知,$\{\varepsilon\} = [L]\{u\}$,$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$,于是把式(13)写成矩阵形式为

$$\Pi_p^* = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N}\{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}[L]^{\mathrm{T}}[D][L]\{u(\bar{x}_s)\} - \sum_{s=1}^{N}\{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}\{f(\bar{x}_s)\} - \sum_{s=1}^{N_t}\{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}\{t(\bar{x}_s)\}. \tag{14}$$

对于任意节点,记

$$W_s = \frac{1}{2}\{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}[L]^{\mathrm{T}}[D][L]\{u(\bar{x}_s)\} - \{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}\{f(\bar{x}_s)\} - \{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}\{t(\bar{x}_s)\}, \tag{15}$$

那么该点 x 方向的敏感度系数表示为

$$\frac{\partial W_s}{\partial x} = \frac{\partial W_s}{\partial\{u\}^{\mathrm{T}}}\frac{\partial\{u\}^{\mathrm{T}}}{\partial x} = \frac{\partial\{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x}\times[L]^{\mathrm{T}}[D][L]\{u(\bar{x}_s)\} - \frac{\partial\{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x}\{f(\bar{x}_s)\} - \frac{\partial\{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x}\{t(\bar{x}_s)\}. \tag{16}$$

同理,该点 y 方向的敏感度系数表示为

$$\frac{\partial W_s}{\partial y} = \frac{\partial W_s}{\partial\{u\}^{\mathrm{T}}}\frac{\partial\{u\}^{\mathrm{T}}}{\partial y} = \frac{\partial\{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}}{\partial y}\times[L]^{\mathrm{T}}[D][L]\{u(\bar{x}_s)\} - \frac{\partial\{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}}{\partial y}\{f(\bar{x}_s)\} - \frac{\partial\{u(\bar{x}_s)\}^{\mathrm{T}}}{\partial y}\{t(\bar{x}_s)\}.$$

若节点为求解域 Ω 内部点,则其敏感性系数记为[8]

$$S_s = \sqrt{\left(\frac{\partial W_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_s}{\partial y}\right)^2};$$

若节点为边界点,设边界外法线与坐标轴的夹角余弦分别为 l,m,则其敏感性系数为

$$S_s = \left|\left(\frac{\partial W_s}{\partial x}\right)l + \left(\frac{\partial W_s}{\partial y}\right)m\right|.$$

3　实　例

无网格法有一个共同特点,即使用紧支试函数和具有紧支域的权函数。紧支域也称为影响域,权函数在紧支域内为非零,而在紧支域外为零,且紧支域相对于求解域较小。假设:

(1) 任意节点的位置坐标出现的微小变化限定在物体的几何形状范围内,并且这种微小的变化不会改变物体的形状;

(2) 节点位置坐标出现的微小变化所能影响的范围限定在由权函数给定的紧支域(即影响域)内,不会影响到紧支域以外。

在此基础上应用敏感性理论来分析节点布置方案,以及当一个节点的位置出现微小的变化时,对整个节点布置方案的影响。本文中采用加权最小二乘无网格法求解弹性力学平面问题,由此得到各种布点方案中节点的形函数及其各阶导数,并求出误差范数和敏感性系数。

悬臂梁问题如图2所示。悬臂梁受到右端载荷的作用(不计体力),采用材料的无量纲参数为:$L = 12$,$D = 2$,厚度为单位长度,且沿厚度方向为 z 方

万方数据

向，$P = 6$，弹性模量 $E = 3.0 \times 10^4$，泊松比 $\nu = 0.3$；惯性矩 $I = \frac{1}{12}D^3$。节点布置方案为 5×17 规则布点，即沿 y 方向布置 5 个节点，沿 x 方向布置 17 个点，共布置了 85 个节点，如图 3 所示。

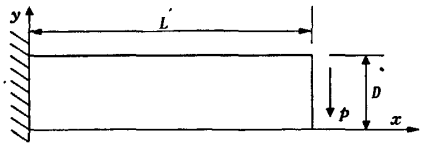

图 2　悬臂梁

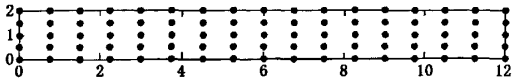

图 3　5×17 规则布点

调用相应的 MatLab 程序，计算所得敏感性系数结果见表 1。计算中发现 σ_y 误差较大(图 4)。上述问题的计算最大误差范数为应力误差范数 $L_{\sigma x} = 1.041\%$；而 $\max(|\sigma_y^h - \sigma_y|) = 6.135$。误差范数定义为

$$L_d = \frac{\sqrt{\sum_{s=1}^{N}(d_s^h - d_s)^{\mathrm{T}}(d_s^h - d_s)}}{\sqrt{\sum_{s=1}^{N} d_s^{\mathrm{T}} d_s}}.$$

式中，d 为位移或应力。

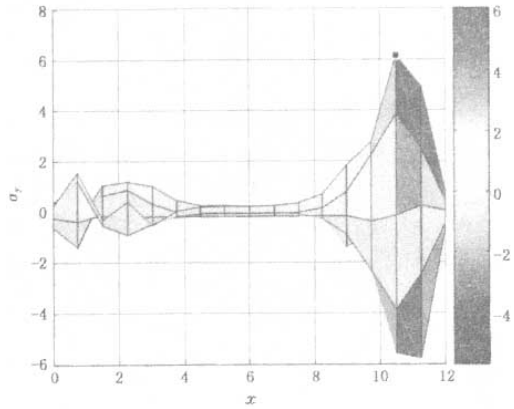

图 4　$x - z$ 观察面上 σ_y 的投影图

表 1　图 3 中各节点的敏感性系数 S_s

S_{ij}	S_{i1}	S_{i2}	S_{i3}	S_{i4}	S_{i5}	S_{i6}	S_{i7}	S_{i8}	S_{i9}
S_{1j}	1.5431	1.387	1.195	0.9973	0.8816	0.7409	0.611	0.4956	0.3915
S_{2j}	0.7938	0.6739	0.5924	0.5209	0.4344	0.3648	0.3016	0.244	0.1925
S_{3j}	0.011	0.0008	0.0043	0.0022	0.0009	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001
S_{4j}	0.791	0.6727	0.5954	0.5228	0.4344	0.365	0.3013	0.2439	0.1924
S_{5j}	1.5819	1.3969	1.182	0.9842	0.8844	0.7414	0.6128	0.496	0.3924
S_{ij}	S_{i10}	S_{i11}	S_{i12}	S_{i13}	S_{i14}	S_{i15}	S_{i16}	S_{i17}	
S_{1j}	0.3003	0.2192	0.1525	0.094	0.0761	0.0408	0.0138	0.0002	
S_{2j}	0.1471	0.1079	0.0747	0.0472	0.0204	0.0098	0.0035	0.0033	
S_{3j}	0.0002	0.0002	0.0005	0.0005	0.0017	0.0024	0.0019	0.0036	
S_{4j}	0.147	0.1076	0.0745	0.0468	0.0202	0.0085	0.0028	0.0032	
S_{5j}	0.3009	0.2208	0.1539	0.0957	0.0754	0.0408	0.0133	0.0001	

注：如图 3 所示，S_{ij} 表示第 i 行第 j 列节点敏感性系数，自上而下定义为第 1，2，3，4，5 行，自左向右定义为第 1，2，…，17 列。

从表中数据可知，在 x 方向，梁的固定端(即左端)的敏感系数最大，离固定端越远敏感系数越小，除了轴线方向上的点，都基本呈递减趋势；而在 y 方向离边界越近敏感系数越大，除了梁的右端，都在轴线上降到最小值，基本以轴线为对称轴向上边界和下边界线性增长。由此可知节点的敏感性系数的物理意义是该点的势能对微小扰动(即微小位移)的敏感程度。敏感系数越大说明此点对整个布点方案的影响越大，在这些点附近若出现不合理的布点将导致较大的计算误差甚至得到错误结果。因此，可根据计算所得到的敏感性系数对布点方案进行如下改进：

(1) 对于位移边界，在进行布点时应该进行加密布置尤其是固定端，因为位移边界往往是最敏感的区域。这也正是在计算过程中若对位移边界值加以微小改变，计算结果会相差很大的原因。

(2) 对于力边界，从数据结果可知在与位移边界交汇的点其敏感系数较小，这是因为这些点在系数矩阵组装时既作为位移边界点又作为力边界点，因此对这些边界上的非交汇点进行适当的加密即可。

(3) 在求解域内部，对于那些敏感性系数大的点进行加密即可。可以将 S_s 的平均值作为是否加密的判断依据，在本例中 S_s 的平均值为 0.3224。

改进后的布点方案如图 5 所示。调用计算程序，得到的最大误差范数为应力误差范数 $L_{\sigma x} = 0.46518\%$；而 $\max(|\sigma_y^h - \sigma_y|) = 1.41$。图 6 所示为改进布点方案后计算的 $x - z$ 平面上 σ_y 的投影图。由图看出，计算精度明显提高。

在上述改进方案中具体操作方法如下：

万方数据

(1) 若节点的敏感性系数较大(大于判断依据值),说明该节点所处区域为误差较大的区域,该节点位置的变化对整个节点布置方案影响较大,在编制程序和考虑节点布置方案时,该节点位置应当重点考虑,即应考虑尽量在该节点位置周围实施节点加密步骤(图 7),关于具体的加密规则可参考文献[11] 和[12]。

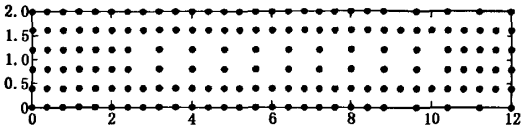

图 5　改进后的节点布置图

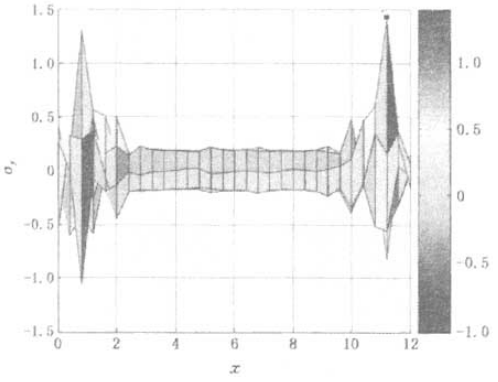

图 6　节点改进后计算的 $x-z$ 观察面上 σ_y 的投影图

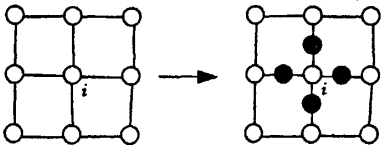

图 7　第 i 个节点周围布点加密

(2) 若节点的敏感性系数较小(小于判断依据值),说明该节点位置的变化对节点布置方案影响较小,那么就不需要在该节点周围实施加密步骤。

4　结束语

将势能作为响应变量来对无网格法中的节点进行敏感性分析。在数值计算中引入节点敏感性系数后,可以获得敏感系数的平均值并将其作为判断依据,对原有的节点布置方案进行有效的改进。找到敏感性系数大的节点,在其周围进行适当加密,提高了节点布置方案的优化效率和计算精度,说明了该方法对节点方案改进的有效性。

参考文献:

[1] LIU W K. Moving least square reproduce kernel method (Part I): methodology and convergence[J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 1997, 143 (10):422-433.

[2] THEODORE Sussman, BATHE K J. The gradient of the finite element variational indicator with respect to nodal point coordinates: an explicit calculation and applications in fracture mechanics and mesh optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985,21(6):763-774.

[3] HENNEBERGER G. Sensitivity analysis of nodal position in adaptive refinement of finite element mesh[J]. IEEE: Trans Magn,1990,26(8):787-790.

[4] WANG Shu-yu, SUN Yan-bing, GALLAGHER R H. Sensitivity analysis in shape optimization of continuum structure[J]. Computer and Structures, 1985, 20(2): 855-867.

[5] PAULINO G H, SIFT E, MUKHERJEEAND S P. Nodal sensitivities as error estimates in computational mechanics [J]. Acta Mechanica,1997,121:191-213.

[6] 张钧强,罗先启. 关于无网格法节点布置方案的研究和探讨[J]. 三峡大学学报:自然科学版,2005,27(3):237-240.
ZHANG Jun-qiang, LUO Xian-qi. Discussion on nodal arranging scheme of meshless method[J]. Journal of China Three Gorges University(Natural Sciences),2005,27(3):237-240.

[7] 张雄,刘岩. 无网格法[M]. 北京:清华大学出版社,2005:1-58.

[8] 署恒木,仝兴华. 工程有限单元法[M]. 东营:石油大学出版社,2003:78-82.

[9] 张雄,胡炜,潘小飞,等. 加权最小二乘无网格法[J]. 力学学报,2003,35(4):425-431.
ZHANG Xiong, HU Wei, PAN Xiao-fei, et al. Meshless weighted least-square method[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 35(4): 425-431.

[10] 张选兵. 基于敏感性分析和小波分析的无单元研究[D]. 武汉:中科院武汉岩土力学研究所,1997.

[11] CHUNG Heungjin. Adaptive nodal generation with element-free galerkin method[J]. Structural Engineering and Mechanics,2000,10(6):635-650.

[12] 江兴贤,陈红全. Euler 方程无网格算法及布点技术[J]. 南京航空航天大学学报,2004,36(2):174-178.
JIANG Xing-xian, CHEN Hong-quan. Gridless method for eluer equations and distributing point technique[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautic,2004,36(2):174-178.

(编辑　沈玉英)

万方数据