

文章编号:1673-5005(2007)05-0154-04

抽象函数空间算子方程解的存在定理

排 新 颖

(中国石油大学 数学与计算科学学院, 山东 东营 257061)

摘要:利用单调迭代的方法研究了抽象函数空间 $C[I, E]$ 中算子方程解的存在性、惟一性以及解的迭代序列的收敛性,证明了抽象函数空间算子方程解的存在性。

关键词:算子方程;正规锥;解

中图分类号:O 175 文献标识码:A

Existence theorems of solutions for operator equations in abstract functional spaces

PAI Xin-ying

(College of Mathematics and Computational Science in China University of Petroleum,
Dongying 257061, Shandong Province, China)

Abstract: By means of monotone iterative technique, the existence of solutions for operator equations in $C[I, E]$, the uniqueness of solution and the convergence rate of the iterative sequence were investigated. The existence theorems of solutions for operator equations in abstract functional spaces were obtained.

Key words: operator equation; normal cone; solution

1 预备知识

假设 $(E, \|\cdot\|)$ 是实 Banach 空间, P 是 E 中正规锥, 且 P 在 E 中导出一个半序“ $\leq$ ”, 即当 $x \leq y \Rightarrow y - x \in P$; N 是 P 的正规常数, 即对任意 $x, y \in E$, 当 $\theta \leq x \leq y$, 有 $\|x\| \leq N\|y\|$, 其中 θ 是 E 中的零元素. $I = [0, b]$ ($b > 0$), 令 $C[I, E] = \{x: I \rightarrow E \mid x(t) \text{ 在 } I \text{ 上连续}\}$, 易知 $C[I, E]$ 在范数 $\|x\|_c = \max_{t \in I} \|x(t)\|$ 下是一个 Banach 空间. $C[I, E]$ 中半序“ $\leq$ ”, 即

$x \leq y \Leftrightarrow \forall x, y \in C[I, E], x(t) \leq y(t), \forall t \in I$.

2 主要结果

定理 1 设 P 是实 Banach 空间 E 中正规锥, 若存在 $u_0 \in C[I, E]$, 满足下列条件:

(i) $A: D \subset C[I, E] \rightarrow C[I, E]$ 是单调递增的, 即 $\forall x, y \in D$, 若 $x \geq Ay$, 有 $Ax \geq Ay$, 其中 $D = \{x \in C[I, E] \mid x \geq u_0\}$,

(ii) 存在 $M > 0, \alpha \in [0, 1)$ 满足

$$Au(t) - Av(t) \leq \frac{M}{t^\alpha} \int_0^t [u(s) - v(s)] ds, \forall u, v \in D,$$

$u \geq v, t \in (0, b]$,

(iii) $u_0 \leq Au_0$,

则算子方程 $Au = u$ 在 D 中有惟一解 u^* , 对 $\forall x_0 \in D$, 有迭代序列 $x_n = Ax_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 收敛于 u^* , 另外, 有如下误差估计:

$$\|x_n - u^*\|_c \leq \frac{\beta^n}{n!} [e^\beta \|Au_0 - u_0\|_c + \|x_0 - u_0\|_c],$$

其中 $\beta = NMb^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}$.

证明 由条件(i)和(iii), 有

$$u_0 \leq Au_0 \leq A^2u_0 \leq \dots \leq A^n u_0 \leq \dots,$$

即

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \quad (1)$$

其中 $u_n = A^n u_0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 由条件(ii)和式(1), 有

$$\theta \leq u_2(t) - u_1(t) = Au_1(t) - Au_0(t) \leq$$

收稿日期:2007-02-21

作者简介:排新颖(1977-),女(汉族),山东临清人,助教,硕士,研究方向为非线性泛函分析。

$$\frac{M}{t^\alpha} \int_0^t [u_1(s) - u_0(s)] ds, t \in (0, b].$$

由 P 的正规性有

$$\|u_2(t) - u_1(t)\| \leq \frac{NM}{t^\alpha} \int_0^t \|u_1(s) - u_0(s)\| ds \leq$$

$$\frac{NM}{t^\alpha} \int_0^t \|Au_0 - u_0\|_c ds = NMt^{1-\alpha} \|Au_0 - u_0\|_c,$$

$t \in (0, b].$

由归纳法知

$$\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \leq \frac{(NMt^{1-\alpha})^n}{(2-\alpha)(3-2\alpha)\cdots(n-(n-1)\alpha)} \times$$

$$\|Au_0 - u_0\|_c,$$

$t \in (0, b], n = 1, 2, 3, \dots$

因此

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|_c &\leq \frac{(NMb^{1-\alpha})^n}{(2-\alpha)(3-2\alpha)\cdots(n-(n-1)\alpha)} \|Au_0 - u_0\|_c \leq \\ &\frac{(NMb^{1-\alpha})^n}{(1-\alpha)(2-2\alpha)(3-3\alpha)\cdots(n-n\alpha)} \|Au_0 - u_0\|_c = \\ &\frac{\beta^n}{n!} \|Au_0 - u_0\|_c. \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\beta = NMb^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}$, 所以对 $\forall M > 0$, 有

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n+m}\|_c &\leq \|u_n - u_{n+1}\|_c + \|u_{n+1} - u_{n+2}\|_c \\ &+ \cdots + \|u_{n+m-1} - u_{n+m}\|_c \leq \\ &\left(\frac{\beta^n}{n!} + \frac{\beta^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{\beta^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\right) \|Au_0 - u_0\|_c. \end{aligned} \quad (3)$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \|Au_0 - u_0\|_c < +\infty$, 所以对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 自然数 N_0 , 使

$$\sum_{n=N_0}^{N_0+m} \frac{\beta^n}{n!} \|Au_0 - u_0\|_c < \varepsilon, \quad \forall m = 1, 2, 3, \dots$$

由式(3), 得 $\|u_{n+m} - u_n\|_c < \varepsilon$, 对 $\forall n > N_0, m = 1, 2, 3, \dots$, 即 $\{u_n\}$ 是 $D \subset C[I, E]$ 中的 Cauchy 列, 因为 D 在 $C[I, E]$ 中是闭的, 所以存在 $u^* \in D$, 使 $u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, 由式(1), 显然有

$$u_n = A^n u_0 \leq u^*, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

因此,

$$u_{n+1} \leq Au^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

并且可得 $u^* \leq Au^*$. 故有

$$u_{n+1} = Au_n \leq u^* \leq Au^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

且有下式成立:

$$\theta \leq Au^*(t) - u^*(t) \leq Au^*(t) - Au_n(t) \leq$$

$$\frac{M}{t^\alpha} \int_0^t [u^*(s) - u_n(s)] ds, \quad t \in (0, b].$$

由 P 的正规性, 有

$$\|Au^*(t) - u^*(t)\| \leq \frac{NM}{t^\alpha} \int_0^t \|u^*(s) - u_n(s)\| ds \leq$$

$$NMt^{1-\alpha} \|u^* - u_n\|_c, \quad t \in (0, b],$$

则 $\|Au^* - u^*\|_c \leq NMb^{1-\alpha} \|u^* - u_n\|_c \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 故 $Au^* = u^*$, 即 u^* 是算子方程 $Au = u$ 在 D 中的解。

下面证明 $Au = u$ 在 D 中解是惟一的。

若 $v^* \in D$ 满足 $Av^* = v^*$, 则 $v^* \geq u_0$, 并有

$$u_1 = Au_0 \leq Av^* = v^*,$$

即

$$u_0 \leq u_1 \leq v^*,$$

由归纳法, 显然有

$$u_0 \leq u_n \leq v^*, \quad n = 1, 2, \dots$$

类似式(2), 有

$$\|v^* - u_n\|_c \leq \frac{\beta^n}{n!} \|v^* - u_0\|_c \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

即

$$u_n \rightarrow v^* (n \rightarrow \infty).$$

这就说明 $u^* = v^*$. 因此, $Au = u$ 在 D 中有惟一解。

对 $\forall x_0 \in D$, 由条件(i) 有

$$u_1 = Au_0 \leq Ax_0 = x_1,$$

由归纳法知

$$u_0 \leq u_n \leq A^n x_0 = x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

类似式(2) 有

$$\|x_n - u_n\|_c \leq \frac{\beta^n}{n!} \|x_0 - u_0\|_c. \quad (4)$$

在式(3) 中令 $m \rightarrow \infty$, 有

$$\|u_n - u^*\|_c \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} \|Au_0 - u_0\|_c \leq$$

$$e^\beta \frac{\beta^n}{n!} \|Au_0 - u_0\|_c, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

由式(4) 知

$$\begin{aligned} \|x_n - u^*\|_c &\leq \|x_n - u_n\|_c + \|u_n - u^*\|_c \leq \\ &\frac{\beta^n}{n!} [e^\beta \|Au_0 - u_0\|_c + \|x_0 - u_0\|_c]. \end{aligned} \quad (5)$$

因此 $x_n \rightarrow u^* (n \rightarrow \infty)$, 式(3) 是误差估计式。

定理2 设 P 是实 Banach 空间 E 中正规锥, 若存在 $v_0 \in C[I, E]$, 满足下列条件:

(i) $A: S \subset C[I, E] \rightarrow C[I, E]$ 是单调递增的,

其中 $S = \{x \in C[I, E] \mid x \leq v_0\}$,

(ii) 存在 $M > 0, \alpha \in [0, 1)$ 满足

$$Au(t) - Av(t) \leq \frac{M}{t^\alpha} \int_0^t [u(s) - v(s)] ds, \quad \forall u, v \in S,$$

$u \geq v, t \in (0, b]$,

(iii) $Av_0 \leq v_0$,

则算子方程 $Au = u$ 在 S 中有惟一解 v^* , 对 $\forall y_0 \in S$, 有迭代序列 $y_n = Ay_{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 收敛于 v^* , 且有如下误差估计:

$$\|y_n - v^*\|_c \leq \frac{\beta^n}{n!} [e^\beta \|Av_0 - v_0\|_c + \|y_0 - v_0\|_c].$$

其中 $\beta = NMb^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-1}$.

证明 类似定理1的证明。

若定理1和定理2中条件(ii)变成(ii)*: 存在 $M > 0, \alpha \in [0, 1)$ 满足

$$Au(t) - Av(t) \leq \frac{M}{t^\alpha} \int_0^t L[u(s) - v(s)] ds, \forall u, v \in$$

D (或 S), $u \geq v, t \in (0, b]$,

其中 $L: D \rightarrow D$ (或 $S \rightarrow S$) 是有界线性算子, 则定理1, 2的结论仍然成立。

定理3 设 P 是实 Banach 空间 E 中正规锥, $A: C[I, E] \rightarrow C[I, E]$ 是一算子, 若下列条件成立:

(i) A 是单调递减的, 即 $\forall x, y \in C[I, E], x \geq y$, 有 $Ax \leq Ay$,

(ii) 存在 $M > 0, \alpha \in [0, 1)$ 满足

$$Au(t) - Av(t) \geq -\frac{M}{t^\alpha} \int_0^t [u(s) - v(s)] ds, \forall u, v \in$$

$C[I, E], u \geq v, t \in (0, b]$,

(iii) $\{u \in C[I, E] \mid u \leq Au, u \leq A^2u\} \cup \{v \in C[I, E] \mid Av \leq v, A^2v \leq v\} \neq \Phi$,

则算子方程 $Au = u$ 在 $C[I, E]$ 中至少有一解, 且不存在两个可以比较的解。

证明 不失一般性, 假设 $\exists u_0 \in C[I, E]$, 使得 $u_0 \leq Au_0, u_0 \leq A^2u_0$. 由条件(i), 有

$$u_0 \leq Au_0, \quad Au_0 \geq A^2u_0;$$

$$A^2u_0 \leq A^3u_0, \quad A^3u_0 \geq A^4u_0;$$

$\vdots$

$$A^{2n}u_0 \leq A^{2n+1}u_0, \quad A^{2n+1}u_0 \geq A^{2n+2}u_0;$$

$\vdots$

并且

$$u_0 \leq A^2u_0 \leq \dots \leq A^{2n}u_0 \leq \dots;$$

$$Au_0 \geq A^3u_0 \geq \dots \geq A^{2n+1}u_0 \geq \dots.$$

由条件(ii), 有

$$\theta \geq A^2u_0(t) - Au_0(t) \geq$$

$$-\frac{M}{t^\alpha} \int_0^t [Au_0(s) - u_0(s)] ds, \quad t \in (0, b],$$

即

$$\theta \leq Au_0(t) - A^2u_0(t) \leq$$

$$\frac{M}{t^\alpha} \int_0^t [u_0(s) - Au_0(s)] ds, \quad t \in (0, b].$$

由 P 的正规性, 有

$$\|Au_0(t) - A^2u_0(t)\| \leq \frac{NM}{t^\alpha} \int_0^t \|u_0(s) - Au_0(s)\| ds$$

$$\leq NMt^{1-\alpha} \|Au_0 - u_0\|_c, \quad t \in (0, b],$$

由归纳法可得

$$\|A^{n+1}u_0(t) - A^n u_0(t)\| \leq$$

$$\frac{(NMt^{1-\alpha})^n}{(2-\alpha)(3-2\alpha)\cdots(n-(n-1)\alpha)} \|Au_0 - u_0\|_c,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, t \in (0, b],$$

因此有

$$\|A^{n+1}u_0 - A^n u_0\|_c \leq$$

$$\frac{(NMb^{1-\alpha})^n}{(2-\alpha)(3-2\alpha)\cdots(n-(n-1)\alpha)} \|Au_0 - u_0\|_c,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots.$$

类似定理1的证明, $\{A^n u_0\}$ 收敛到算子方程 $Au = u$ 在 $C[I, E]$ 中的解, 即 $Au = u$ 在 $C[I, E]$ 中至少有一个解。

下面证明 $Au = u$ 在 $C[I, E]$ 中不可能有两个可以比较的解。

实际上, 若 $Au = u$ 在 $C[I, E]$ 中有两个解 u, v 满足 $u \leq v$, 由 A 是单调递减的, 有

$$\theta \leq v(t) - u(t) = Av(t) - Au(t) \leq \theta, \quad t \in I,$$

因此 $u(t) = v(t), t \in I$, 即 $u = v$.

如果定理3的条件(ii)变成(ii)**: 存在 $M > 0, \alpha \in [0, 1)$ 满足

$$Au(t) - Av(t) \geq -\frac{M}{t^\alpha} \int_0^t L(u(s) - v(s)) ds, \forall u, v \in$$

$C[I, E], u \geq v, t \in (0, b]$,

其中 $L: C[I, E] \rightarrow C[I, E]$ 是有界线性算子, 则定理3的结论仍然成立。

定理4 设 E 是实 Banach 空间, $A: C[I, E] \rightarrow C[I, E]$ 是一个算子, 若存在 $M > 0, \alpha \in [0, 1)$ 满足

$$\|Au(t) - Av(t)\| \leq \frac{M}{t^\alpha} \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds,$$

(6)

其中 $\forall u, v \in C[I, E], t \in (0, b]$, 则算子方程 $Au = u$ 在 $C[I, E]$ 中有惟一解。

证明 $\forall u, v \in C[I, E]$, 由式(6), 有

$$\|Au(t) - Av(t)\| \leq \frac{M}{t^\alpha} \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds \leq$$

$$Mt^{1-\alpha} \|u - v\|_c. \quad (7)$$

类似地,

$$\|A^2u(t) - A^2v(t)\| = \|A(Au(t)) - A(Av(t))\| \leq$$

$$\frac{M}{t^\alpha} \int_0^t \|Au(s) - Av(s)\| ds \leq \frac{M}{t^\alpha} \int_0^t Ms^{1-\alpha} \|u - v\|_c ds \leq$$

$$\frac{M^2}{t^\alpha} \|u-v\|_C \int_0^t s^{1-\alpha} ds \leq \frac{M^2}{2-\alpha} \|u-v\|_C t^{2(1-\alpha)}.$$

由归纳法知

$$\|A^n u(t) - A^n v(t)\| \leq \frac{M^n}{(2-\alpha)(3-2\alpha)\cdots(n-(n-1)\alpha)} \|u-v\|_C t^{n(1-\alpha)},$$

$$n=1,2,3,\dots$$

因此

$$\|A^n u - A^n v\| \leq \frac{M^n b^{n(1-\alpha)}}{(2-\alpha)(3-2\alpha)\cdots(n-(n-1)\alpha)} \|u-v\|_C \leq \frac{\beta^n}{n!} \|u-v\|_C, \quad n=1,2,3,\dots \quad (8)$$

其中 $\beta = \frac{Mb^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, 易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta^n}{n!} = 0$, 故必存在自然数 n_0 , 使得 $\frac{\beta^{n_0}}{n_0!} < 1$, 即 A^{n_0} 是紧算子, 由紧算子理论, A^{n_0}

在 $C[I, E]$ 有惟一不动点 u^* , 即 $A^{n_0} u^* = u^*$. 等式两端用 A 作用, 有 $A^{n_0} A u^* = A u^*$, 这说明 $A u^*$ 也是 A^{n_0} 的不动点. 由于 A^{n_0} 不动点是惟一的, 故有 $A u^* = u^*$, 即 u^* 是算子方程 $Au = u$ 在 $C[I, E]$ 中的惟一解.

3 算 例

E 是实 Banach 空间, P 是 E 中的正规锥, 考虑 E 中的奇异积分方程

$$u(t) = \int_0^t \frac{k(t,s)}{t^\alpha} f(s, u(s)) ds = Au(t), \quad (9)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$, $I = [0, 1]$, $f: I \times E \rightarrow E$ 且 $u \in C[I, E]$, 若下列条件成立:

(I) $\forall t \in I, f(t, u)$ 关于 u 是单调递增的, 且 $\exists M > 0$, 使得

$$f(t, u) - f(t, v) \leq M(u - v), \quad \forall u, v \in E, u \geq v,$$

其中“ $\leq$ ”是 P 中的半序关系,

(II) $f(t, \theta) \geq \theta$,

(III) $k(t, s) \geq 0, \forall 0 \leq s \leq t \leq 1$ 且 $K = \max_{0 \leq t \leq 1} k(t, s) < +\infty$,

则由定理1可以证得, 若条件(I), (II), (III)都成立, 方程(9)有惟一解 $u^*(t) \geq \theta(t \in I)$, 并且 $\forall x \in C[I, E], x(t) \geq \theta(t \in I)$, 迭代序列 $\{A^n x\}$ 收敛到

u^* , 另外, 有如下估计式:

$$\|A^n x(t) - u^*(t)\|_C \leq \frac{\beta^n}{n!} [e^\beta \|A\theta(t)\|_C + \|x\|_C],$$

其中 $\beta = MKN(1-\alpha)^{-1}$, $\theta(t) \equiv \theta(t \in I)$, $\|\cdot\|_C$ 是 $C[I, E]$ 中的范数.

参考文献:

- [1] DEIMLING K. Nonlinear functional analysis [M]. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [2] GUO Da-jun, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear problems in abstract cones [M]. Boston/New York: Academic Press, 1988.
- [3] SUN Jing-xian, ZHAO Zeng-qin. Fixed point theorems of increasing operators and applications to nonlinear integro-differential equations with discontinuous terms [J]. J Math Anal Appl, 1993, 175: 33-45.
- [4] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.
- [5] 郭大钧, 孙经先. 抽象空间微分方程 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1989.
- [6] 姜本东, 宋光兴. 一类非线性算子方程解的存在惟一性定理及其应用 [J]. 数学物理学报, 1997, 17(3): 308-313.
- LOU Ben-dong, SONG Guang-xing. Existence and uniqueness theorems of solutions for nonlinear operator equations and applications [J]. Acta Mathematica Sinica, 1997, 17(3): 308-313.
- [7] 孙经先, 刘立山. 非线性算子方程的迭代解及其应用 [J]. 数学物理学报, 1993, 13(2): 141-145.
- SUN Jing-xian, LIU Li-shan. Iterative solutions for nonlinear operator equations and applications [J]. Acta Mathematica Sinica, 1993, 13(2): 141-145.
- [8] ZHANG Zhi-tao. New fixed point theorems of mixed monotone operators and applications [J]. J Math Anal Appl, 1991, 160: 468-479.
- [9] 宋光兴. Banach 空间中非线性积分-微分方程的解 [J]. 石油大学学报: 自然科学版, 1996, 20(6): 91-94.
- SONG Guang-xing. The solutions of nonlinear integro-differential equations in Banach spaces [J]. Journal of the University of Petroleum, China (Edition of Natural Science), 1996, 20(6): 91-94.

(编辑 修荣荣)