文章编号:1673-5005(2008)02-0159-04

# Banach 空间中混合积分微分方程周期边值问题

王秀荣, 宋光兴

(中国石油大学 数学与计算科学学院,山东 东营 257061)

**摘要**: 利用半序方法和单调迭代研究了 Banach 空间中混合积分微分方程周期问题解的存在性、最大解、最小解与相应的迭代逼近序列。所得结果仅使用了上解或下解单独存在的条件,推广和改进了某些已知结果。

**关键词**: 积分微分方程; 上下解; 单调迭代方法; 半序理论; Banach 空间

**中图分类号**:O 177.91 **文献标识码**: A

# Periodic boundary value problem for integro-differential equations of mixed type in Banach spaces

WANG Xiu-rong, SONG Guang-xing

(*College of Mathematics and Computational Science in China University of Petroleum, Dongying 257061, Shandong Province, China*)

**Abstract**: The exsitence of soultions of periodic boundary value problem for nonlinear integro-differential equations of mixed type in Banach spaces were studied by using partial order method and the monotone iterative method when only exsitence of one upper solution or one lower solution and some other condtions. And its maximal and minimal solutions were obtained. The results presented extend and improve the recent results.

**Key words**: integro-differential equation; upper and lower solution; monotone iterative technique; partial order theory; Banach space

利用上下解方法与单调迭代法研究非线性混合型积分微分方程问题已取得了许多成果,但关于混合型一阶微分积分方程周期边值问题(PBVP)中最大解、最小解的存在问题研究不多。文献[1],[2] 讨论了在 Banach 空间中锥 $P$ 为正则锥且上、下解都存在的情况,文献[3]讨论了 Banach 空间中锥 $P$ 为正规锥且上下解都存在的情况。笔者主要是在 Banach 空间中锥 $P$ 为正规锥且上、下解只存在其一的情况下利用单调迭代法对混合型一阶微分积分方程周期边值问题中最大解、最小解的存在问题进行讨论,以对文献[1] ~ [3]的某些定理进行改进和推广。

## 1 预备知识和引理

本文中假定 $E$ 是实 Banach 空间,$\|\cdot\|$是 $E$ 中的范数 $J = [0,2\pi]$,在实 Banach 空间中考虑混合型一阶积分微分方程的周期边值问题

$$\begin{cases} u' = f(t,u,Tu,Su),t \in J, \\ u(0) = u(2\pi). \end{cases} \tag{1}$$

其中$f \in C[J \times E \times E \times E,E]$,并且

$$Tu(t) = \int_0^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s,$$

$$Su(t) = \int_0^{2\pi} h(t,s)u(s)\mathrm{d}s,\ k(t,s) \in C[D,R^+],$$

$h \in C[J \times J,E]$, $D = \{(t,s) \in J \times J,t \geqslant s\}$。令 $k_0 = \max\{k(t,s):(t,s) \in D\}$, $h_0 = \max\{h(t,s):(t,s) \in J \times J\}$,

记 $C[J,E] = \{u \mid u(t):J \to E$ 在 $J$ 上连续$\}$,$C^1[J,E] = \{u \mid u(t)$ 在 $J$ 上有一阶导数$\}$,对 $u = u(t) \in C[I,E]$, $\|u\|_c = \max\limits_{t\in I}\|u(t)\|$。显然 $C[J,E]$ 在 $\|u\|_C$ 下为 Banach 空间。

收稿日期:2007-08-05

基金项目:中国石油大学(华东)硕士研究生创新基金项目(S0409661)

作者简介:王秀荣(1980-),女(汉族),山东聊城人,硕士,主要从事应用数学研究。

万方数据

设 $P$ 是 $E$ 中的锥,"$\leqslant$"是由 $P$ 导出的半序,对 $u = u(t), v = v(t) \in C[J,E]$,若对任何 $t \in J$ 有 $u(t) \leqslant v(t)$,则记做 $u \leqslant v$。

称 $P$ 是正规的,如果存在常数 $N > 0$ 满足 $\theta \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leqslant N\|y\|$;

称 $P$ 是正则的,如果 $E$ 中每个按序有上界的递增序列必有极限,即若 $\{x_n\} \subset E$ 满足

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant y,$$

其中 $y$ 是 $E$ 中某元素,必有 $x \in E$ 使 $\|x_n - x\| \to 0 (n \to \infty)$。

**引理 1**[4-5] 设 $p \in C^1[J,E]$ 满足

$$p' \leqslant -Mp - NTp - N_1Sp,\ \forall t \in J;\ p(0) \leqslant p(2\pi),$$

其中 $M > 0, N \geqslant 0, N_1 \geqslant 0$ 是满足下列条件之一的常数:

$$\begin{cases} 2\pi(Nk_0 + N_1h_0)(e^{2\pi M} - 1) \leqslant M, \\ 2\pi(M + 2\pi Nk_0 + 2\pi N_1h_0) \leqslant 1, \end{cases} \tag{2}$$

则 $p(t) \leqslant \theta,\ \forall t \in J$.

**引理 2**[4-5] 设 $H \subset C[J,E]$ 是可数的有界集,则 $\alpha(H(t)) \in L[J,R^+]$ 并且

$$\alpha\left(\left\{\int_J x(t)\mathrm{d}t : x \in H\right\}\right) \leqslant 2\int_J \alpha(H(t))\mathrm{d}t.$$

**引理 3**[4-5] 若 $H$ 是 $C[J,E]$ 中的有界等度连续集,定义 $m(t) = \alpha(B(t)), t \in J$,则 $m(t)$ 是 $t \in J$ 上的连续函数,且 $\alpha\left(\int_J H(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_J \alpha(H(t))\mathrm{d}t$.

**引理 4** 设 $m(t) \in C[J,R^+], a_1 \geqslant 0, a_2 \geqslant 0$,且满足 $a_1(e^{2\pi a_2} - 1) < a_2$,若

$$m(t) \leqslant a_1\int_0^{2\pi} m(s)\mathrm{d}s + a_2\int_0^t m(s)\mathrm{d}s,$$

则 $m(t) = 0$.

**证明** 令

$$m_1(t) = \int_0^t m(s)\mathrm{d}s,\ m_2(t) = m_1(t)e^{-a_2t},$$

则

$$m_2'(t) = (m_1'(t) - a_2m_1(t))e^{-a_2t} \leqslant a_1m_1(2\pi)e^{-a_2t},$$

那么

$$m_2(t) \leqslant a_1m_1(2\pi)\int_0^t e^{-a_2s}\mathrm{d}s = m_1(2\pi)\frac{a_1}{a_2}(1 - e^{-a_2t}),$$

因此

$$m_1(2\pi)e^{-2\pi a_2} = m_2(2\pi) \leqslant m_1(2\pi)\frac{a_1}{a_2}(1 - e^{-2\pi a_2}),$$

由于 $\frac{a_1}{a_2}(e^{2\pi a_2} - 1) < 1$,则 $m_1(2\pi) = 0$.

因此

$$m(t) = 0,\ \forall t \in J.$$

## 2 主要结果

为了方便起见,首先给出下列基本假设:

$(H_1)$(i) 存在 $u_0 \in C^1[J,E]$ 使 $u'_0 \leqslant f(t, u_0, Tu_0, Su_0)$, $u_0(0) \leqslant u_0(2\pi)$;

(ii) 存在 $v_0 \in C^1[J,E]$ 使 $v'_0 \geqslant f(t, v_0, Tv_0, Sv_0)$, $v_0(0) \geqslant v_0(2\pi)$。

$(H_2)$(i) 当 $t \in J, u, v \in G = \{w \in C[J,E] \mid w \geqslant u_0\}$, $u \geqslant v$ 时,

$$f(t,u,Tu,Su) - f(t,v,Tv,Sv) \geqslant -M(u-v) - NT(u-v) - N_1S(u-v); \tag{3}$$

(ii) 当 $t \in J, u, v \in Q = \{w \in C[J,E] \mid w \leqslant v_0\}$, $u \geqslant v$ 时式(4)成立。

这里 $M > 0, N \geqslant 0, N_1 \geqslant 0$ 是常数,满足式(2)中任一式且有

$$Nk_0 + N_1h_0 < M; \tag{4}$$

$(H_3)$(i) 存在 $g(t) \in C[J,E]$ 使得 $\forall u \in G$ 有 $f(t,u,Tu,Su) + Mu < g(t), t \in J$;

(ii) 存在 $z(t) \in C[J,E]$ 使得 $\forall u \in Q$ 有 $f(t,u,Tu,Su) + Mu > z(t), t \in J$。

$(H_4)$ 存在常数 $c_1 \geqslant 0, c_2 \geqslant 0$ 和 $c_3 \geqslant 0$ 使得 $\alpha(f(J,U_1,U_2,U_3)) \leqslant c_1\alpha(U_1) + c_2\alpha(U_2) + c_3\alpha(U_3)$ 对任何有界集 $U_1, U_2, U_3 \subset E$,且 $\sigma(e^{\tau\sigma} - 1) < \tau$。此处

$$\tau = 2[(c_1 + M) + 4\pi(c_2 + 2N)k_0],$$

$$\sigma = \frac{2[(c_1 + M) + 2\pi(c_2 + 2N)k_0 + 2\pi h_0(c_3 + 2N_1)2\pi e^{2\pi M}]}{e^{2\pi M} - 1}.$$

**定理 1** 设 $E$ 是实 Banach 空间,$P$ 是 $E$ 中的正规锥。若条件 $(H_1)$(i), $(H_2)$(i), $(H_3)$(i) 和 $(H_4)$ 满足,则 PBVP(1) 在 $G$ 中有最小解 $u^*$ 且存在单调递增序列 $\{u_n\} \in G$ 关于 $t \in J$ 一致收敛于 $u^*$。这里 $u_n(t)(n = 1,2,\cdots,)$ 满足

$$u_n(t) = e^{-Mt}\left(\frac{1}{e^{2\pi M} - 1}\int_0^{2\pi}[g_{n-1}(s) - NTu_n(s) - N_1Su_n(s)]e^{Ms}\mathrm{d}s + \int_0^t[g_{n-1}(s) - NTu_n(s) - N_1Su_n(s)]e^{Ms}\mathrm{d}s\right), \tag{5}$$

其中

$$g_{n-1}(s) = f\left(s, u_{n-1}(s), \int_0^s k(s,\tau)u_{n-1}(\tau)\mathrm{d}\tau, \int_0^{2\pi} h(s,\tau)u_{n-1}(\tau)\mathrm{d}\tau\right) + Mu_{n-1}(s) + N\int_0^s k(s,\tau)u_{n-1}(\tau)\mathrm{d}\tau + N_1\int_0^{2\pi} h(s,\tau)u_{n-1}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

万方数据

**定理 2** 设 $E$ 是实 Banach 空间,$P$ 是 $E$ 中的正规锥。若条件$(H_1)$(ii),$(H_2)$(ii),$(H_3)$(ii) 和$(H_4)$满足,则 PBVP(1) 在 $Q$ 中有最小解 $v^*$ 且存在单调递增序列$\{v_n\} \in Q$ 关于 $t \in J$ 一致收敛于 $v^*$。这里 $v_n(t)(n = 1,2,\cdots)$ 满足

$$u(t) = \mathrm{e}^{-Mt}\Big(\frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi M}-1}\int_0^{2\pi}[g_{n-1}(s) - NTv_n(s) - N_1Sv_n(s)]\mathrm{e}^{Ms}\mathrm{d}s + \int_0^t[g_{n-1}(s) - NTv_n(s) - N_1Sv_n(s)]\mathrm{e}^{Ms}\mathrm{d}s\Big),$$

其中

$$g_{n-1}(s) = f\Big(s,v_{n-1}(s),\int_0^s k(s,\tau)v_{n-1}(\tau)\mathrm{d}\tau,\int_0^{2\pi}h(s,\tau)v_{n-1}(\tau)\mathrm{d}\tau\Big) + Mv_{n-1}(s) + N\int_0^s k(s,\tau)v_{n-1}(\tau)\mathrm{d}\tau + N_1\int_0^{2\pi}h(s,\tau)v_{n-1}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

**定理 3** 设 $E$ 是实 Banach 空间,$P$ 是 $E$ 中的正则锥。$(H_1)$(i),$(H_2)$(i) 和$(H_3)$(i) 满足,则定理 1 成立。

**定理 4** 设 $E$ 是实 Banach 空间,$P$ 是 $E$ 中的正则锥。若条件$(H_1)$(ii),$(H_2)$(ii) 和$(H_3)$(ii) 满足,则定理 2 成立。

其中定理3 与文献[2] 中的定理2.1很类似,都是在正则锥中讨论问题,但定理 3 只要求存在上解,而定理2.1 要求上、下解都存在。

## 3 主要定理的证明

主要对定理 1 进行证明。

**证明** 首先考虑线性周期边值问题

$$\begin{cases}u'(t) + Mu(t) = -NTu(t) - N_1Su(t) + g(t),\\ u(0) = u(2\pi).\end{cases} \tag{6}$$

其中

$$g(t) = f(t,x(t),Tx(t),Sx(t)) + Mx(t) + NTx(t) + N_1Sx(t).$$

显然方程(6) 等价于

$$u(t) = \mathrm{e}^{-Mt}\Big(\frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi M}-1}\int_0^{2\pi}[g(s) - NTu(s) - N_1Su(s)]\mathrm{e}^{Ms}\mathrm{d}s + \int_0^t[g(s) - NTu(s) - N_1Su(s)]\mathrm{e}^{Ms}\mathrm{d}s\Big) \triangleq Fu(t),$$

则算子 $F:C[J,E] \to C[J,E]$ 可得到$\|Fu - Fv\|_C \leqslant \dfrac{Nk_0 + N_1h_0}{M}\|u - v\|_C$, $\forall u,v \in C[J,E]$。由$(H_2)$ 知 $F$ 是压缩算子,由 Banach 空间中的不动点定理,$F$ 有惟一解 $u \in C[J,E]$,这个解是 PBVP(6) 在 $C^1[J,E]$ 的惟一解。令 $u = Ax(t)$,则当且仅当$x(t)$ 是$A$的不动点即 $x(t) = Ax(t)$ 时 $x(t)$ 是 PBVP(1) 的解。令 $u_n = Au_{n-1}(n = 0,1,2\cdots)$,其中 $u_n$ 的表达式如式(5),下证

$$u_0 \leqslant u_1 = Au_0. \tag{7}$$

由式(7) 和$(H_1)$(i) 有

$$(u_0(t) - u_1(t))' \leqslant -M(u_0(t) - u_1(t)) - NT(u_0(t) - u_1(t)) - N_1S(u_0(t) - u_1(t)),$$
$$u_0(0) - u_1(0) \leqslant u_0(2\pi) - u_1(2\pi).$$

由式(2) 及引理1,则有 $u_0(t) - u_1(t) \leqslant \theta$,即 $u_0 \leqslant u_1$,且 $u_1 \in G$。

假设 $u_{k-1},u_k \in G,u_{k-1} \leqslant u_k$,则由式(6) 及$(H_2)$(i) 知

$$(u_k - u_{k-1})'(t) \leqslant -M(u_k - u_{k-1})(t) - NT(u_k - u_{k+1}) - N_1S(u_k - u_{k+1})(t),$$
$$(u_k - u_{k+1})(0) \leqslant (u_k - u_{k+1})(2\pi).$$

由式(2) 及引理 1 知

$$(u_k - u_{k+1})(t) \leqslant \theta,\ t \in J,$$

即 $u_{k+1} \in G$ 且 $u_k \leqslant u_{k+1}$。综上所述

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots. \tag{8}$$

令 $B = \{u_n \mid n = 0,1,2\cdots\}$,下证$B$ 有界且是相对紧集。

由于 $t \geqslant s$,则 $\mathrm{e}^{Mt} \geqslant \mathrm{e}^{Ms}$。由$\{u_n\}$ 非递减和$(H_3)$(i),

$$u_0(t) \leqslant u_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-Mt}\Big(\frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi M}-1}\int_0^{2\pi}[f(s,u_{n-1},Tu_{n-1},Su_{n-1}) + Mu_{n-1}]\mathrm{e}^{Ms}\mathrm{d}s + \int_0^t[f(s,u_{n-1},Tu_{n-1},Su_{n-1}) + Mu_{n-1}]\mathrm{e}^{Ms}\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi M}-1}\int_0^{2\pi}h(s)\mathrm{d}s + \int_0^t h(s)\mathrm{d}s,\ t \in J. \tag{9}$$

由式(9) 和 $P$ 的正规性知,$\{u_n\}$ 是 $C[J,E]$ 中的有界序列。由$(H_3)$(i) 知,$f(t,u_n,Tu_n,Su_n)$,$t \in J(n = 0,1,2,\cdots)$ 是有界的,那么存在 $c_0 \geqslant 0$ 使

$$\|f(t,u_{n-1},Tu_{n-1},Su_{n-1}) + Mu_{n-1} - NT(u_n - u_{n-1}) - N_1S(u_n - u_{n-1})\| \leqslant c_0,$$
$$t \in J,n = 0,1,2,\cdots.$$

由 $u_n$ 的定义知,$B$ 在 $J$ 上是等度连续的。令 $m(t) = \alpha(B(t)) = \alpha(\{u_n \mid n = 0,1,2,\cdots\})$,由引理2 和引理 3 知,$m(t) \in [J,R^+]$,且由$(H_4)$ 则有

$$m(t) \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}^{2\pi M}-1}\int_0^{2\pi}\alpha(\{f(s,u_{n-1},Tu_{n-1},Su_{n-1}) +$$

万方数据

$Mu_{n-1}-NT(u_n-u_{n-1})-N_1S(u_n-u_{n-1})\mathrm{e}^{-M(t-s)}$,
$n=1,2,\cdots\})\mathrm{d}s+2\int_0^t\alpha(\{f(s,u_{n-1},Tu_{n-1},Su_{n-1})+$
$Mu_{n-1}-NT(u_n-u_{n-1})-N_1S(u_n-u_{n-1})\mathrm{e}^{-M(t-s)},n=$
$1,2,\cdots\})\mathrm{d}s \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}^{2\pi M}-1}\int_0^{2\pi}[\alpha\big(f(s,B(s),TB(s),$
$SB(s))\big)+M\alpha(B(s))+2N\alpha(TB(s))+$
$2N_1\alpha(SB(s))]\mathrm{d}s+\int_0^t[\alpha\big(f(s,B(s),TB(s),SB(s))+$
$M\alpha(B(s))+2N\alpha(TB(s))+2N_1\alpha(SB(s))\big)]\mathrm{d}s.$ (10)

其中

$$\alpha(TB(s))\leqslant\int_0^tk(s,\tau)\alpha(B(\tau))\mathrm{d}\tau\leqslant k_0\int_0^tm(\tau)\mathrm{d}\tau,$$
$$\alpha(SB(s))\leqslant\int_0^{2\pi}h(s,\tau)\alpha(B(\tau))\mathrm{d}\tau\leqslant h_0\int_0^{2\pi}m(\tau)\mathrm{d}\tau,\ \forall\ t\in J.$$

由$(H_4)$知上式等价于

$$m(t)\leqslant\frac{2}{\mathrm{e}^{2\pi M}-1}\Big[(c_1+M)\int_0^{2\pi}m(s)\mathrm{d}s+k_0(c_2+2N)\int_0^{2\pi}(2\pi-s)m(s)\mathrm{d}s+2\pi h_0(c_3+2N_1)\times\int_0^{2\pi}m(s)\mathrm{d}s\Big]+2(c_1+M)\int_0^tm(s)\mathrm{d}s+$$
$$2k_0(c_2+2N)\int_0^t(t-s)m(s)\mathrm{d}s+2h_0(c_3+2N_1)t\times\int_0^{2\pi}m(s)\mathrm{d}s\leqslant2(c_1+M)\int_0^tm(s)\mathrm{d}s+2k_0(c_2+2N)\times 2\pi\int_0^tm(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{2[(c_1+M)+2\pi k_0(c_2+2N_1)+2\pi h_0(c_3+2N_1)2\pi\mathrm{e}^{2\pi M}]}{\mathrm{e}^{2\pi M}-1}\times\int_0^{2\pi}m(s)\mathrm{d}s=\tau\int_0^tm(s)\mathrm{d}s+\sigma\int_0^{2\pi}m(s)\mathrm{d}s.$$

其中$\tau,\sigma$在$(H_4)$中有定义。

根据引理4及$(H_4)$有

$$m(s)=0,\ \forall t\in J,$$

即$B=\{u_n\mid n=0,1,2,\cdots\}$是相对紧集,由$\{u_n\}$的单调性和锥$P$的正规性知,存在$u^*\in C[J,E]$使$u_n\to u^*(n\to\infty)$且$u_n\leqslant u^*$。在式(5)中令$n\to\infty$可得

$$u^*=\frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi M}-1}\int_0^{2\pi}[f(s,u^*,Tu^*,Su^*)+Mu^*]\mathrm{e}^{-M(t-s)}\mathrm{d}s+\int_0^t[f(s,u^*,Tu^*,Su^*)+Mu^*]\mathrm{e}^{-M(t-s)}\mathrm{d}s.$$

求导得

$$u^{*\prime}=f(t,u^*,Tu^*,Su^*),$$

即$u^*$是PBVB(1)在$G$中的解。

若$v\in G$也是PBVB(1)的解,则$v\geqslant u_0$且

$$v'=f(t,v,Tv,Sv),\ v(0)=v(2\pi).\tag{11}$$

由式(6)和式(11),利用数学归纳法可证

$$u_n\leqslant v,\ n=1,2,\cdots.\tag{12}$$

在式(12)中令$n\to+\infty$,且$P$是正规锥,知$u^*\leqslant v$,即$u^*$是PBVB(1)在$G$中的最小解。证毕。

**注** 定理2的证明与定理1类似,定理3由于$P$是正则锥,根据正则锥的性质很容易证明存在$u^*\in C[J,E]$使得$u_n\to u^*(n\to\infty)$。

**注** 利用半序理论与单调迭代方法研究各类方程解时,一般假设方程的上、下解都存在,本文只使用了一个上解或下解,得出结果,推广了文献[1]~[3]中的一些结果。

**参考文献:**


[1] 邢顺来,孙书荣. Banach空间中积分微分方程周期边值问题[J]. 山东大学学报:理学版,2003;38(5):75-79.
XING Shun-lai, SUN Shu-rong. The periodic boundary value problems of the integro-differential equations in Banach spaces[J]. Journal of Shandong University(Natural science)2003,38(5):75-79.

[2] 代文超. Banach空间中一阶微分-积分方程周期边值问题的极值解[J]. 济宁师范学院学报,2001,22(6):7-10.
DAI Wen-chao. Extremum solutions for the periodic boundary value problems of the integro-differential equations in Banach spaces[J]. Journal of Jining Teachers College,2001,22(6):7-10.

[3] 竺雪君. Banach空间中积分微分方程解的存在性[J]. 南开大学学报:自然科学版,2001,34(3):53-61.
ZHU Xue-jun. The existence of integro-differential equations in Banach spaces[J] Journal of Nankai University (Natural Science), 2001,34(3):53-61.

[4] GUO Dajun, LAKSHMIKANTHAM V, LIU Xinzhi. Nonlinear integral equation in abstract spaces[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publisher, 1996.

[5] 郭大钧. 非线性分析中的半序方法[M]. 济南:山东科学技术出版社,1995.


(编辑 修荣荣)

万方数据