

文章编号:1673-5005(2008)05-0087-05

# 基于分形方法的水力压裂裂缝起裂扩展机理

李 玮, 闫 铁, 毕雪亮

(大庆石油学院 提高油气采收率教育部重点实验室, 黑龙江 大庆 163318)

**摘要:**利用分形几何模型描述岩石断裂裂纹的曲折形态,建立了裂纹分形模型下的岩石应力强度因子表达式。在此基础上,以裸眼井为例分析了井底岩石的起裂压力,并建立了考虑裂纹分形扩展的缝内压力计算模型和裂缝宽度方程。理论分析结果表明,岩石扩展路径的曲折程度对模型的计算结果影响较大,考虑裂纹分形扩展后的模型计算数值大于直线型扩展的计算结果,且考虑裂纹分形模型与直线型模型的裂缝宽度计算值之比随着断裂面分形维数的增大而增大。

**关键词:**水力压裂; 断裂韧性; 分形裂纹; 裂缝起裂; 裂缝扩展

**中图分类号:** TE 21      **文献标识码:** A

## Mechanism of hydraulically created fracture breakdown and propagation based on fractal method

LI Wei, YAN Tie, BI Xue-liang

(Key Laboratory of Enhanced Oil & Gas Recovery, Ministry of Education, Daqing Petroleum Institute, Daqing 163318, China)

**Abstract:** The tortuosity shape of rock crack was described by using the fractal geometry model, and the expression of rock stress intensity factor was established. The fracture initiation pressure of bottom rock was analyzed as the example of bare well, and the computation model of crack internal pressure and the crack width equation considering the crack fractal extended were presented. The theoretical analysis results show that the calculation results were affected by tortuosity degree of extended way of rock. The results of model considering the crack fractal extended is bigger than the calculation result of right line extended model, and the crack width ratio of two models increases with the fractal dimension of fractured surface increasing.

**Key words:** hydraulic fracturing; fracture toughness; fractal fracture; fracture breakdown; fracture propagation

水力压裂岩石实际上是井壁岩石在液压力的作用下起裂、扩展的过程。到20世纪80年代末,已经形成了从二维到三维的一系列裂缝几何形态描述模型,它们为现场压裂施工的顺利进行提供依据。然而,由于基于线弹性断裂力学理论,这些模型在拟合施工压力时存在计算结果偏小的局限性。这其中的一个根本问题就是计算断裂韧性时将裂纹形态假设为沿直线路径扩展,影响了临界扩展力的实际计算精度。在断裂力学中,为了探讨材料的断裂性能,Griffith<sup>[1]</sup>和Irwin<sup>[2]</sup>提出了著名的裂纹临界扩展力准则,阐明了裂纹临界扩展力与单位宏观量度断裂面积表面能之间的关系。由于岩石是脆性材料,因

此常采用线弹性力学理论来分析水力压裂裂缝的扩展行为。无论是在宏观还是在微观上,实际观察的绝大部分岩石的断裂面都是粗糙不规则的,谢和平对此进行了深入的研究<sup>[3-5]</sup>。笔者考虑岩石裂缝扩展的不规则性,应用分形几何理论建立分形裂缝扩展下的岩石应力强度因子模型,通过对井眼附近应力场进行分析,建立裸眼井和射孔井的水力压裂裂缝起裂、扩展模型。

### 1 直线型裂纹假设下的岩石断裂韧性

水力压裂中多应用张开型裂纹来建立裂缝的延伸准则。由断裂力学原理可知张开型应力强度因子

收稿日期:2008-06-05

基金项目:国家自然科学基金项目(50474093)和中国石油天然气集团公司中青年科技创新基金项目(03E703)

作者简介:李玮(1979-),男(汉族),黑龙江大庆人,博士研究生,主要从事油气井工程力学及水力压裂机理的研究。

$K_I$  与断裂能  $G_c$  存在如下关系:

$$K_I = A \sqrt{G_c} \tag{1}$$

其中

$$A = \sqrt{E/(1-\mu^2)}, G_c = 2r_s$$

式中,  $A$  为断裂面积;  $E$  为岩石弹性模量;  $\mu$  为岩石泊松比;  $r_s$  为单位宏观量度断裂面积表面能。

根据 Bowie<sup>[6]</sup> 和 Clifton<sup>[7]</sup> 提出的受内压厚壁空心圆柱形岩样测定断裂韧性的方法, 设空心圆柱体内半径为  $a$ , 外半径为  $b$ , 裂纹深度为  $H$ , 内压为  $p$ , 并设外径与内径之比为  $W$ , 则裂缝尖端应力强度因子为

$$K_I = K^* p \sqrt{\pi a} \tag{2}$$

式中,  $K^*$  为无因次修正系数, 它是  $H/(b-a)$  和  $W = b/a$  的函数。

Clifton<sup>[7]</sup> 给出了内置衬套的空心圆柱形岩样承受均匀内压时  $K^*$  随  $H/(b-a)$  和  $W$  变化的关系曲线, 即  $K^*$  值根据该曲线来确定。

### 2 分形裂纹假设下的岩石断裂韧性

经典断裂力学的一个根本假设是将岩石断裂轨迹视为直线型平面模型, 而现场实测和实验观测均表明, 无论在晶粒尺度上还是在断层尺度上, 岩石的断裂面都是非常不规则和粗糙的, 难以用一个平直而直线型裂纹来近似模拟<sup>[8]</sup>。

实际地下岩石水力压裂裂缝的断裂表面是凹凸不平的, 裂纹扩展路径是不规则、弯弯曲曲的(见图1)。Mandelbrot<sup>[9]</sup> 分形曲线长度的估计式为

$$L(\delta) = L_0 \delta^{1-D}$$

式中,  $L_0$  为裂纹路径的直线长度, m;  $\delta$  为码尺;  $D$  为不规则扩展路径的分形维数。

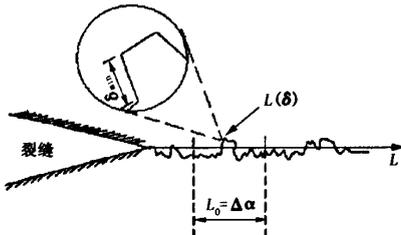


图1 按分形裂纹扩展的水力压裂示意图

Fig.1 Hydraulic fracturing by fractal crack propagation

可近似地选择  $\delta \approx r$ ,  $r$  是自相似比。这样分形曲线长度可近似表示为

$$L(\delta) = L_0(1/r)^{D-1} \tag{3}$$

根据文献[4]可知裂纹不规则扩展下临界断裂

能可表示为

$$G_{crit} = 2r_s(1/r)^{(D-1)}$$

由式(1)可推导出如下关系:

$$K_{ID} = K_I(1/r)^{(D-1)/2} \tag{4}$$

式中,  $K_{ID}$  为沿分形裂纹断裂的岩石强度因子, 它反映了裂缝尖端应力奇异性的强度, 与材料和裂缝的尺寸及所载荷荷有关,  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

依据应用最为广泛的岩石断裂韧性判据<sup>[2]</sup>, 知

$$K_{ID} \leq K_{IDC} \tag{5}$$

式中,  $K_{IDC}$  为断裂韧性, 是材料对裂缝扩展阻力的度量, 可通过试验确定,  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

由式(4)知裂纹不规则扩展下, 岩石断裂路径较直线型假设要长, 所以沿分形路径断裂的岩石断裂韧性要大于按直线型扩展的情况。

### 3 裸眼井井壁岩石起裂准则

岩石起裂准则是对岩石在应力达到临界时发生破坏进行描述的标准。目前在水力压裂设计中基本使用拉伸破裂准则和剪切破裂准则, 且以最大拉应力理论为基础的拉伸破裂准则预测裂缝起裂模型更为常用。当最小主应力为水平主应力时, 产生的是垂直裂缝。随着井底压力的增大, 井壁有效水平周向应力达到或者超过岩石的抗张强度时, 在垂直于水平周向应力的方向产生垂直裂缝。

在水力压裂破裂前, 深部井眼岩石的应力分布是由原始地应力场、孔内流体压力和井壁应力集中构成的<sup>[10]</sup>。在压裂前, 要判断井筒围岩破裂前的应力状态。假设岩石为均质各向同性弹性介质, 无渗透, 远场作用着最小和最大水平地应力  $\sigma_h$  和  $\sigma_H$ , 钻井液液柱压力为  $p_w$ , 地层孔隙压力为  $p_p$ 。若以压应力为正, 则裸眼直井孔壁处的应力状态为

$$\begin{cases} \sigma_r = p_w, \\ \sigma_\theta = (\sigma_H + \sigma_h) - 2(\sigma_H - \sigma_h) \cos 2\theta - p_w, \\ \tau_{r\theta} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

式中,  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  分别为径向应力、周向应力和剪切力,  $\text{MPa}$ ;  $\theta$  为矢径与最大水平主应力的夹角, ( $^\circ$ )。

对于裸眼完井井筒, 当有效周向应力  $\sigma_{\theta e}$  达到岩石的抗张强度时, 产生垂直裂缝, 即

$$\sigma_{\theta e} = \sigma_\theta - \alpha p_p \geq -\sigma_T \tag{7}$$

式中,  $\alpha$  为有效应力系数;  $\sigma_T$  为岩石的抗张强度。

由  $\sigma_H > \sigma_h$ , 可知, 水力裂缝会产生在  $\theta = 90^\circ$  处, 即意味着裂缝在垂直于最小主应力方向产生。

由式(6), (7)可得破裂压力  $p_f$  为

$$p_f = 3\sigma_h - \sigma_H - \alpha p_p + \sigma_T \tag{8}$$

断裂韧性与岩石的抗拉强度关系式为

$$\sigma_T = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a_c}}$$

式中,  $a_c$  为岩石的长度级特征(如缺陷或岩石颗粒尺寸), m。

根据式(4)整理得

$$\sigma_T = \frac{K_{IDC}}{\sqrt{\pi a_c (1/r)^{D-1}}} \quad (9)$$

式中,  $a_c (1/r)^{D-1}$  为分形尺度下的岩石的长度级特征, m。

将式(9)代入到式(8)中,即可建立岩石断裂韧性与起裂压力之间的关系式。应用现场小型水力压裂试验数据可以计算压裂层岩石断裂面的分形维数,为后续岩石扩展计算提供必要的参数。

### 4 分形裂纹假设下裂缝扩展模型

#### 4.1 模型的建立

假设无限大平板内有一长为  $2L$  的裂缝与最大主应力方向平行,裂缝内流体压力为  $p_{wf}$ (图2)。对于内压恒定的 I 型张开的二维裂缝, Irwin<sup>[2]</sup> 发现应力强度因子可以简化为

$$K_I = p_{net} \sqrt{\pi L}$$

其中

$$p_{net} = p_{wf} - \sigma_h$$

式中,  $L$  为裂缝半长, m;  $p_{net}$  为裂缝张开的净内压, MPa。

根据式(4)得

$$K_{ID} = p_{net} \sqrt{\pi L \left(\frac{1}{r}\right)^{D-1}} \quad (10)$$

式中,  $L \left(\frac{1}{r}\right)^{D-1}$  为分形尺度下的裂缝长度, m。当裂缝张开长度大于  $L \left(\frac{1}{r}\right)^{D-1}$  时,裂缝尖端的应力强度因子为  $K_{IDC}$ , 裂缝开始扩展。

在式(4)的基础上,满足本文中假设而不改变文献假设的情况下,可将文献[11]中裂缝宽度  $\omega(x)$  重新推导为

$$\omega(x) = \frac{4}{\pi E} K_{IDC} \sqrt{\frac{L^2 \left(\frac{1}{r}\right)^{D-1} - x^2 \left(\frac{1}{r}\right)^{1-D}}{\pi L}} \quad (11)$$

式(11)表明,不管液体压力如何分布,断裂面的形态只与裂缝长度、岩石断裂韧性和弹性模量有关。裂缝形态方程的惟一性说明水力压裂裂缝具有形态上的自相似扩展特征,其中断裂韧性起着重要作用。

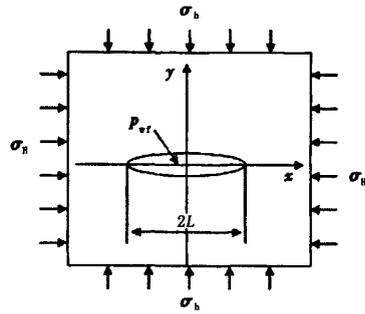


图2 张开型二维裂缝

Fig.2 Openness two-dimension crack

为了形象地描述裂纹形态和方便断裂韧性的计算,把裂纹的弯折段看作是裂纹扩展的生成元,采用如图3所示的分形裂纹扩展模型来描述实际裂纹扩展段。

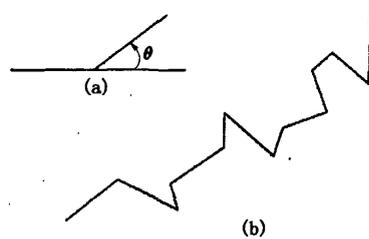


图3 裂纹扩展的分形模型

Fig.3 Fractal crack propagation model

由此可以计算出分形裂纹扩展的分形维数<sup>[12]</sup>

$D_f$ :

$$D_f = \frac{\lg n}{\lg \left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\lg 3}{\lg (5 + 4 \cos \theta)^{1/2}} \quad (12)$$

因此

$$n = 3; \frac{1}{r} = (5 + 4 \cos \theta)^{1/2}$$

将式(12)代入到式(4)得

$$K_{ID} = K_I (5 + 4 \cos \theta)^{(D_f-1)/4} \quad (13)$$

其中

$$\theta = \arccos \frac{(3^{2D_f} - 5)}{4}$$

将式(13)代入到式(10)和(11),即可得到

$$K_{ID} = p_{net} \sqrt{\pi L (5 + 4 \cos \theta)^{D_f-1}} \quad (14)$$

$$\omega(x) = \frac{4}{\pi E} K_{IC} (5 + 4 \cos \theta)^{\frac{D_f-1}{4}} \times$$

$$\sqrt{\frac{L^2 (5 + 4 \cos \theta)^{\frac{D_f-1}{2}} - x^2 (5 + 4 \cos \theta)^{\frac{1-D_f}{2}}}{\pi L}} \quad (15)$$

式(15)即为考虑沿分形裂纹扩展的缝宽方程。式

中的  $K_{Ic}$  可以通过目的层取心室内测定,也可以通过现场试验确定。 $D_f$  可以通过取心室内测定,也可由现场试验数据经式(9)计算得到。因此,根据式(14)和式(15)用分形裂纹模型来描述岩石断裂的非规则扩展,揭示了分形裂纹的不规则程度和裂缝弯折角对缝内压力、裂缝宽度的影响,这对于水力压裂过程的岩石断裂、扩展机理研究有一定的现实意义。给定注入压裂液体积即可计算裂缝尺寸;当以恒定排量注入时,可以确定缝宽、缝壁压力以及裂缝扩展速度。

4.2 参数分析

岩石的断裂面具有分形特征,这是岩石断裂本身的固有特征。忽略岩石断裂的固有特征建立水力压裂模型,必然会使模型的计算精度存在理论误差。分析和研究这些特征对岩石断裂的影响,不仅能提高模型的计算精度,而且对于认清水力压裂机理有着重要的意义。

图4为分形维数随弯折角的变化曲线。由图4可以看出,分形维数随弯折角增大而增大,二者呈指数关系。这说明岩石断裂裂纹越曲折,裂纹的分形维数越大,岩石的断裂面越粗糙。图5为不同假设条件下裂缝内压力比值随分形裂纹弯折角变化的曲线。图5表明,内压力比值与弯折角为指数关系,说明岩石裂纹越曲折,岩石断裂需要的内压力就越大。图6为不同粗糙度下分形模型与直线型模型裂缝宽度的比值。图6显示,随着分形维数的增大,岩石断裂面的粗糙度越大,压裂缝宽也就越大,而且高弯折角缝宽增大的比率要明显大于低弯折角情况。对于单条曲线,随着距离中心位置的增大,缝宽增大倍数增加。

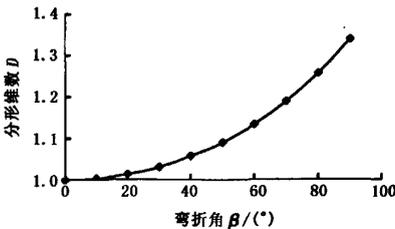


图4 分形维数与弯折角的关系曲线

Fig.4 Relation of fractal dimension and bend angle

当考虑地层水力压裂裂缝的分形效应之后,模型的计算结果发生明显的变化。这说明岩石断裂的分形特征影响着岩石的断裂特性,也对水力压裂的各种计算模型产生影响。

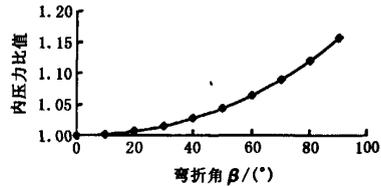


图5 不同假设下内压力比值与弯折角的关系曲线

Fig.5 Relation of rate of inner pressure and bend angle under different assumption

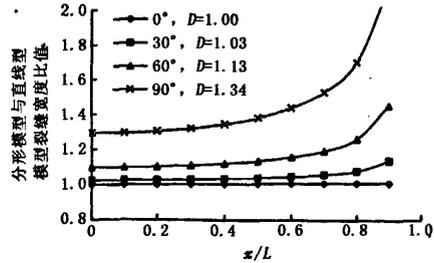


图6 断裂面粗糙度对裂缝宽度的影响

Fig.6 Effect of fractured surface asperity on crack width

5 结论

(1)水力压裂岩石的裂缝延伸扩展具有分形特征。

(2)基于分形裂纹的岩石断裂韧性模型体现了岩石断裂裂纹的自身特点,提高了岩石断裂韧性的实际测试精度。

(3)压裂岩石的分形裂纹扩展下需要的裂缝内压力比直线型大,自然断裂的岩石比直线假设情况下要耗费更多的能量。

(4)裂缝宽度随着岩石断裂面分形维数的增大而增大,而且高分形维数下缝宽增大倍数要明显大于低分形维数情况。岩石断裂的分形性对岩石的裂缝宽度有明显的影晌,考虑这些影响有利于提高水力压裂模拟的准确性。

参考文献:

[1] GRIFFITH A A. Theory of rupture; Proc 1st Int Congress Appl Mech[C]. Delft, 1924; 55-63.  
 [2] IRWIN G. Fracture dynamics[J]. Fracturing of Metals Am Soc for Met, 1948; 147-166.  
 [3] XIE H P, SANDERSON D J. Fractal effect of rapidly propagation cracks[R]. Proc of the 2nd Int Corof Nonlinear Mech, Beijing, China, 1995.  
 [4] 谢和平,高峰,周宏伟,等. 岩石断裂和破碎的分形研究[J]. 防灾减灾工程学报, 2003, 23(4): 1-9.

- XIE He-ping, GAO Feng, ZHOU Hong-wei, et al. Fractal fracture and fragmentation in rocks[J]. *Journal of Seismology*, 2003,23(4):1-9.
- [5] 谢和平. 脆性材料裂纹扩展分形运动学[J]. *力学学报*, 1994,26(6):757-762.
- XIE He-ping. Fractal kinematics of crack propagation in brittle materials[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1994,26(6):757-762.
- [6] BOWIE O L, FREEZE C E. Elastic analysis for a radial crack in a circular ring[J]. *Eng Frac Mech*, 1972, 4(2):315-321.
- [7] CLIFTON R J, SIMONSON E R, JONE A H, et al. Determination of the critical stress intensity factor  $K_{IC}$  from internally pressured thick-walled vessels[J]. *Experimental Mechanics*, 1976:233-238.
- [8] 刘洪,符兆荣,黄桢,等. 水力压裂力学机理新探索[J]. *钻采工艺*, 2006,29(3):36-40.
- LIU Hong, FU Zhao-rong, HUANG Zhen, et al. Study on hydraulic fracturing mechanics[J]. *Drilling & Production Technology*, 2006,29(3):36-40.
- [9] MANDELROT B B. The fractal geometry of nature[M]. New York: W H Freeman, 1982.
- [10] 李传亮,孔详言. 油井压裂过程中岩石破裂压力计算公式的理论研究[J]. *石油钻采工艺*, 2000,22(2):54-57.
- LI Chuan-liang, KONG Xiang-yan. A theoretical study on rock breakdown pressure calculation equations of fracturing process[J]. *Oil Drilling & Production Technology*, 2000,22(2):54-57.
- [11] 阳友奎,肖长富,邱贤德,等. 水力压裂裂缝形态与缝内压力分布[J]. *重庆大学学报*, 1995,18(3):20-26.
- YANG You-kui, XIAO Chang-fu, QIU Xian-de, et al. Fracture geometry and pressure distribution in fracture for hydrofracturing[J]. *Journal of Chongqing University*, 1995,18(3):20-26.
- [12] 吴立,阎天俊. 岩体爆破破碎过程中的分形效应[J]. *凿岩机械气动工具*, 2002(3):6-9.
- WU Li, YAN Tian-jun. Fractal effect of crack spreading in rock blasting[J]. *Zhaoyan Jixie Qidong Gongju*, 2002(3):6-9.

(编辑 李志芬)

(上接第82页)

- [19] GDANSKI R D. Experience and research show best designs for foam-diverted acidizing[J]. *Oil & Gas Journal*, 1993:85-89.
- [20] JOSE M Alvarez, HERCILIO Rivas, GEIDY Navarro, et al. An optional foam quality for diversion in matrix-acidizing projects[R]. SPE 58711, 2000.
- [21] MORPHY P H, GREENGALD K G. Operational experience with foam-diverted acid jobs in the Gulf of Mexico[J]. *Journal of Petroleum Technology*, 1998,50(3):44-45.
- [22] ZHOU Z H, ROSSEN W R. Applying fractional-flow theory to foams for diversion in matrix acidization[J]. *SPE Production & Facilities*, 1994,9(1):29-35.

(编辑 沈玉英)

(上接第86页)

- [15] KRUG J A, et al. Charts help find volume, pressure needed for foam drilling[J]. *Oil and Gas*, 1982:61-64.
- [16] 陈家琅,刘永建,等. *钻井液流动原理*[M]. 北京:石油工业出版社, 1997.
- [17] 宫敬,严大凡. 非牛顿管流摩擦阻计算方法的比较[J]. *石油规划设计*, 1994,5(3):28-32.
- GONG Jing, YAN Da-fan. Comparison of calculation method of frictional loss for non-Newtonian fluid flowing in pipe[J]. *Petroleum Planning & Engineering*, 1994,5(3):28-32.
- [18] 王弥康. 注蒸汽井筒热传递的定量计算[J]. *石油大学学报:自然科学版*, 1994,18(4):77-81.
- WANG Mi-kang. Quantitative calculation of wellbore heat transfer for steam injection wells[J]. *Journal of the University of Petroleum, China (Edition of Natural Science)*, 1994,18(4):77-81.

(编辑 沈玉英)