

文章编号:1673-5005(2008)05-0142-06

相容指标约束下的线性时滞广义系统容错控制设计

王树彬^{1,2}, 王执铨¹

(1. 南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094; 2. 中国石油大学 信息与控制工程学院, 山东 东营 257061)

摘要: 对一类线性不确定时滞广义系统, 讨论了 H_∞ 指标和区域极点指标相容条件下的容错控制器的设计问题。在更一般、更实际的执行器故障模型下, 利用线性矩阵不等式方法, 建立了容错控制中两类指标的相容性理论。分析了与 H_∞ 指标相容的区域极点指标的取值范围, 并在相容指标约束下给出了有效的控制器设计方法。仿真结果表明, 该方法是有效的, 且更能保证系统的动态性能。

关键词: 容错控制; 执行器故障; 相容性; 线性时滞广义系统; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP 273

文献标识码: A

Fault tolerant control system design for linear time-delay systems with multi-indices constraints

WANG Shu-bin^{1,2}, WANG Zhi-quan¹

(1. Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;

2. College of Information and Control Engineering in China University of Petroleum, Dongying 257061, China)

Abstract: The problem of reliable system design for linear time-delay systems with circular pole index, H-infinity constraints was discussed. A more practical and general model of actuator failures was adopted. Based on linear matrix inequality approach, the consistency theory on circular pole index and H-infinity constraints was set up, and the ranges of consistent indices were analyzed in detail. Furthermore, the effective controller design method for systems with constraints of consistent indices was provided. The simulation results show that the design method is effective and can guarantee the dynamic performance of the system.

Key words: fault tolerant control; actuator fault; consistency; linear time-delay singular systems; linear matrix inequality

在实际运行过程中, 时滞是经常出现的一种普遍现象, 如利用长管道或传送带添加物料、在线分析仪、对大时间常数系统的处理或信息传递等均不同程度地存在延迟现象。容错控制是系统对故障的容忍技术, 能够极大地提高系统的可靠性^[1]。近年来有关时滞系统的容错控制设计问题已有不少的研究成果^[2,4]。考虑到系统的实际运行情况, 研究多约束条件下的时滞系统的容错控制设计具有重要的理论意义和应用价值。王福忠等^[4]首次提出了多约束条件下的容错控制系统设计的概念, 但对具体的理论和技术没有进行深入的研究和探讨; 孙金生等^[5]利用线性矩阵不等式(LMI)方法, 研究了一

类线性不确定随机系统的鲁棒 H_∞ 容错控制器设计方法, 分析了 H_∞ 性能指标的取值范围, 但其采用的故障模型简单且没有考虑极点指标和方差指标约束; 杨建军等^[6]研究了区域极点指标与方差指标约束下的控制系统设计方法, 但没有考虑容错性; 张庆灵等^[7]讨论了多时滞线性不确定广义系统的非脆弱 H_∞ 保性能问题, 提出加性和乘性两种形式的控制器增益变化的控制律的设计问题, 但是像这类时滞系统的讨论很少涉及极点问题。针对上述讨论, 笔者在考虑到时滞系统稳定的前提条件下, 对一类线性时滞系统在同时具有区域极点指标、 H_∞ 指标约束下的容错控制器的设计问题进行研究。

收稿日期: 2007-12-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(60574082); 南京理工大学研究生创新基金

作者简介: 王树彬(1969-), 男(汉族), 黑龙江绥化人, 副教授, 博士研究生, 主要研究方向为故障检测与诊断、容错控制及滤波理论。

1 问题描述与引理

考虑如下的线性不确定时滞广义系统:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + \beta_1 Bu(t) + \beta_2 A_d x(t - \tau_1) + \beta_3 B_d u(t - \tau_2) + D_1 \omega(t), \quad (1)$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2)$$

$$x(t) = \Phi(t), t \in (-h, 0), h > 0. \quad (3)$$

式中, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为具有零初值的状态向量; $u \in \mathbb{R}^p$ 为控制输入; $z \in \mathbb{R}^k$ 为被控输出; $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 且一般 $\text{rank}(E) < n$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{k \times p}$ 为已知的常值矩阵; $\omega(t)$ 是平方可积的外部扰动信号; $\Phi(t)$ 为初始状态, 在 $[-h, 0]$ 上连续; 对给定的 $\beta_{km} > 0, k = 1, 2, 3; \beta_k \in [-\beta_{km}, \beta_{km}]$ 为时不变有界不确定参数, 输入和状态时滞相互独立。

假设系统的状态可以直接测量, 本文中采用无记忆状态反馈控制器镇定系统, 控制器的形式为

$$u(t) = Kx(t). \quad (4)$$

式中, K 为待求的状态反馈增益阵。在式(4)的控制器形式下, 闭环系统的状态方程为

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + \beta_1 BKx(t) + \beta_2 A_d x(t - \tau_1) + \beta_3 B_d Kx(t - \tau_2) + D_1 \omega(t), \quad (5)$$

$$E\dot{x}(t) = (A + \beta_1 BK)x(t) + \beta_2 A_d x(t - \tau_1) + \beta_3 B_d Kx(t - \tau_2) + D_1 \omega(t), \quad (6)$$

$$z(t) = (C + DK)x(t). \quad (7)$$

考虑到可能的执行器故障, 引入开关阵 M , 其形式为^[3-4]

$$M = \text{diag}[m_1, m_2, \dots, m_p].$$

其中, $0 \leq m_{il} \leq m_i \leq m_{iu}$ 且 $m_{iu} \geq 1$ 。显然, 当 $m_i = 0$ 时, 第 i 个执行器完全失效; 当 $m_i = 1$ 时, 第 i 个执行器正常工作; 当 $0 \leq m_{il} < m_i < m_{iu}$ 且 $m_i \neq 1$ 时, 第 i 个执行器部分失效。引进如下矩阵:

$$M_0 = \text{diag}[m_{01}, m_{02}, \dots, m_{0p}],$$

$$J = \text{diag}[j_1, j_2, \dots, j_p],$$

$$|L_0| = \text{diag}[|l_1|, |l_2|, \dots, |l_p|].$$

其中

$$m_{0i} = \frac{m_{il} + m_{iu}}{2}, j_i = \frac{m_{iu} - m_{il}}{m_{iu} + m_{il}}, l_i = \frac{m_i - m_{0i}}{m_{0i}}.$$

由此得到

$$M = M_0(I + L_0), |L_0| \leq J \leq I.$$

相应地, 考虑执行器故障情况下的故障闭环系统的状态方程为

$$E\dot{x}(t) = (A + \beta_1 BMK)x(t) + \beta_2 A_d x(t - \tau_1) + \beta_3 B_d MKx(t - \tau_2) + D\omega(t), \quad (8)$$

$$z(t) = (C + DMK)x(t). \quad (9)$$

定义1 具有不确定参数的时滞广义系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + \beta_1 Bu(t) + \beta_2 A_d x(t - \tau_1) + \beta_3 B_d u(t - \tau_2) + D\omega(t),$$

如果对于所有允许的不确定性都是正则、稳定及无脉冲的, 则称该系统是鲁棒稳定的。

定义2 具有不确定参数的时滞广义系统(1), 如果存在状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$, 使闭环系统(6)稳定, 则称式(1)是鲁棒可镇定的。

定义3 若具有不确定参数的时滞广义系统(1)由式(4)作用所得的闭环系统(6)满足:

① 对所有满足允许不确定性的约束, 式(6)是正则、稳定、无脉冲的;

② 设系统的初始状态为 $x(0) = 0$, 对于某给定的性能指标 γ , 有

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|\omega\|_2,$$

则称具有不确定参数的时滞广义系统(1)广义可镇定, 并且满足 H_∞ 范数界;

③ 具有不确定参数的时滞广义系统, 在扰动为零的条件下, 若故障闭环系统的特征方程满足 $\det(sE - (A + \beta_1 BMK + e^{-\tau_1 s} \beta_2 A_d + e^{-\tau_2 s} \beta_3 B_d MK)) = 0$

的所有根位于复平面的 $\text{Res} \leq -a < 0$ 的范围内, 则称相应的闭环系统是鲁棒 α -稳定的。

引理1^[4] 对于具有不确定参数的时滞广义系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + \beta A_d x(t - \tau),$$

如果存在可逆矩阵 P 和对称矩阵 R , 使得不等式

$$E^T P = P^T E \geq 0,$$

$$P^T A + A^T P + P^T \beta A_d R^{-1} (\beta A_d)^T P + R < 0$$

对于所有容许的不确定性 β 成立, 则称此系统是广义二次稳定的。

引理2 对于具有不确定参数的时滞广义系统(1), 如果存在状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$ 、可逆矩阵 P 、对称矩阵 R_1, R_2, R_3 , 使得不等式

$$E^T P = P^T E \geq 0,$$

$$P^T (A + \beta B K) + (A + \beta B K)^T P + P^T \beta_2 A_d R_1^{-1} (\beta_2 A_d)^T P + R_1 + \dots + P^T \beta_3 B R_2^{-1} (\beta_3 B)^T P + R_2 < 0$$

对于所有容许的不确定性成立, 则称此系统是广义二次可镇定的。

引理3 如果具有不确定参数的时滞广义系统(1)广义二次可镇定, 且同时具有 α 稳定及 H_∞ 范数界 γ , 则称该广义系统在区域极点和 H_∞ 指标约束下是容错稳定的。

本研究的目的是:解决带有故障的参数不确定的时滞广义系统(1)的区域极点指标和 H_∞ 指标的相容性,即寻求状态反馈控制率 $u(t) = Kx(t)$,使系统(1)鲁棒可镇定,且同时满足区域极点指标约束和 H_∞ 约束。

为了处理不确定性,引入如下引理:

引理4^[6] 给定具有适维的矩阵 G, L 和对称负定矩阵 Ξ ,则有

$$\Xi + GFL + L^T F^T G^T < 0.$$

对所有满足 $F^T F \leq I$ 的 F 成立,当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$,满足

$$\Xi + \varepsilon GG^T + \varepsilon^{-1} L^T L < 0.$$

引理5 对给定的常矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n \times m}$,下列不等式对任意对称常矩阵存在 $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 成立:

$$\begin{bmatrix} P(A + \beta_{1m} B M_0(I + L_0)K) + (A + \beta_{1m} B M_0(I + L_0)K)^T P + 2\alpha P E + \sum_{k=2}^3 \beta_{km} e^{\sigma \tau_{km}} \Phi_k & P A_d & P B_d M_0(I + L_0)K \\ A_d^T P & -\beta_{2m}^{-1} e^{-\sigma \tau_{1m}} \Phi_1 & 0 \\ (B_d M_0(I + L_0)K)^T P & 0 & -\beta_{3m}^{-1} e^{-\sigma \tau_{2m}} \Phi_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} -2\mu(\sigma)LE + \frac{\Psi_0}{2} + \sum_{k=1}^2 \beta_{km} e^{-\sigma \tau_{km}} \Psi_k & L(A + \beta_{1m} B M_0(I + L_0)K) - (A + \beta_{1m} B M_0(I + L_0)K)^T L & L A_d & L B_d M_0(I + L_0)K \\ (A + \beta_{1m} B M_0(I + L_0)K)^T L - L(A + \beta_{1m} B M_0(I + L_0)K) & -2\Psi_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{1m}^{-1} e^{-\sigma \tau_{1m}} \Psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_{2m}^{-1} e^{-\sigma \tau_{2m}} \Psi_2 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

及附加约束

$$E^T P = P^T E \geq 0, E^T L = L^T E \geq 0,$$

则闭环系统(6)是鲁棒 Ω 区域稳定的,其中

$$\Omega = \{s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}, \sigma \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R} \mid \sigma \leq -\alpha, |\omega| \leq \mu(\sigma)\}.$$

$$\text{令 } \pi_1 = PA + AP + 2\alpha PE + \sum_{k=2}^3 \beta_{km} e^{\sigma \tau_{km}} \Phi_k.$$

证明 考虑故障状态的闭环系统(8)在不考虑扰动的情況下,其特征方程为

$$\det(sE - (A + \beta_1 B M K + e^{-\tau_1 \tau} \beta_2 A_d + e^{-\tau_2 \tau} \beta_3 B_d M K)) = 0 \quad (12)$$

的所有根均位于复平面的开左半平面区域 $\Omega \subset U =$

$$\{s \in \mathbb{C}^- \mid \text{Res} < 0\} \text{ 内}.$$

令 $s = \tilde{\sigma} + j\tilde{\omega}$ 是特征方程(8)的根,另外令

$$W = A + \beta_1 B M K + \cos(-\tau_1 \tilde{\omega}) e^{-\tau_1 \tilde{\sigma}} \beta_2 A_d + \cos(-\tau_2 \tilde{\omega}) e^{-\tau_2 \tilde{\sigma}} \beta_3 B_d M K + \dots + j \sin(-\tau_1 \tilde{\omega}) e^{-\tau_1 \tilde{\sigma}} \beta_2 A_d + j \sin(-\tau_2 \tilde{\omega}) e^{-\tau_2 \tilde{\sigma}} \beta_3 B_d M K,$$

$$2|p^* U q| \leq p^* U M^{-1} U^* p + q^* M q.$$

证明 由柯西-许瓦兹不等式,易得

$$2|p^* U q| = 2|p^* U M^{-1/2} M^{1/2} q| \leq$$

$$2\sqrt{p^* U M^{-1} U^* p q^* M q} \leq p^* U M^{-1} U^* p + q^* M q.$$

2 主要结果

在不考虑干扰约束的前提条件下,关于区域极点指标约束,有如下的定理:

定理1 令 $\alpha > 0$ 及 $\tau_{km} > 0, k = 1, 2, \mu(\sigma): \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$, 如果存在对称正定常矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}, L \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Phi_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Psi_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, k = 0, 1, 2$, 使得以下两个不等式成立:

则必存在非零向量 $\tilde{y}$, 使得

$$W \tilde{y} = (\tilde{\sigma} + j\tilde{\omega}) E \tilde{y},$$

通过适维的矩阵变换 P, L 使得

$$\tilde{y}^* P W \tilde{y} = \tilde{y}^* P (\tilde{\sigma} + j\tilde{\omega}) E \tilde{y};$$

$$\tilde{y}^* W^* P \tilde{y} = \tilde{y}^* E^T (\tilde{\sigma} - j\tilde{\omega}) P \tilde{y}$$

$$\tilde{y}^* L W \tilde{y} = \tilde{y}^* L (\tilde{\sigma} + j\tilde{\omega}) E \tilde{y};$$

$$\tilde{y}^* W^* L \tilde{y} = \tilde{y}^* E^T (\tilde{\sigma} - j\tilde{\omega}) L \tilde{y}.$$

再联系

$$E^T P = P E, E^T L = L E,$$

有

$$\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{y}^* (P W + W^* P) \tilde{y}}{2 \tilde{y}^* P E \tilde{y}}; \tilde{\omega} = -j \frac{\tilde{y}^* (L W - W^* L) \tilde{y}}{2 \tilde{y}^* L E \tilde{y}};$$

再把 W 和 W 的共轭带入,有

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= (\tilde{y}^* T_0 \tilde{y} + e^{-\tau_1 \tilde{\sigma}} \tilde{y}^* \beta_2 P A_d e^{-\tau_1 j} \tilde{\omega} \tilde{y} + e^{-\tau_2 \tilde{\sigma}} \tilde{y}^* P \beta_3 B_d M K e^{-\tau_2 j} \tilde{\omega} \tilde{y} + e^{-\tau_1 \tilde{\sigma}} \tilde{y}^* A_d^T \beta_2^T P e^{\tau_1 j} \tilde{\omega} \tilde{y} + e^{-\tau_2 \tilde{\sigma}} \tilde{y}^* K^T M^T B_d^T \beta_3^T P e^{\tau_2 j} \tilde{\omega} \tilde{y}) / (2 \tilde{y}^* P E \tilde{y}); \\ \tilde{\omega} &= -j (\tilde{y}^* T_1 \tilde{y} + e^{-\tau_1 \tilde{\sigma}} \tilde{y}^* L \beta_2 A_d e^{-\tau_1 j} \tilde{\omega} \tilde{y} + \end{aligned} \quad (13)$$

$$e^{-\tau_2 \tilde{\omega}} \tilde{y}^* L \beta_3 B_d M K e^{-\tau_2 \tilde{\omega}} \tilde{y} + e^{-\tau_1 \tilde{\omega}} \tilde{y}^* A_d^T \beta_2^T L e^{\tau_1 \tilde{\omega}} \tilde{y} + e^{-\tau_2 \tilde{\omega}} \tilde{y}^* K^T M^T B_d^T \beta_3^T L e^{\tau_2 \tilde{\omega}} \tilde{y}) / (2 \tilde{y}^* L E \tilde{y}), \quad (14)$$

其中,

$$T_0 = P(A + \beta_1 B M K) + (A^T + K^T M^T B^T \beta_1^T) P,$$

$$T_1 = L(A + \beta_1 B M K) - (A^T + K^T M^T B^T \beta_1^T) L.$$

再由式(11),联系引理5,有

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &\leq (\tilde{y}^* T_0 \tilde{y} + 2 \tilde{y}^* |e^{-\tau_1 \tilde{\omega}} \beta_2 P A_d e^{-\tau_1 \tilde{\omega}}| \tilde{y} + 2 \tilde{y}^* |e^{-\tau_2 \tilde{\omega}} P \beta_3 B_d M K e^{-\tau_2 \tilde{\omega}}| \tilde{y}) / (2 \tilde{y}^* P E \tilde{y}) \leq \\ &(\tilde{y}^* T_0 \tilde{y} + \tilde{y}^* e^{-\tau_1 \tilde{\omega}} |\beta_2| (P A_d \Phi_1^{-1} A_d^T P + \Phi_1) \tilde{y} + \tilde{y}^* e^{-\tau_2 \tilde{\omega}} |\beta_3| (P B_d M K \Phi_2^{-1} K^T M^T B_d^T P + \Phi_2) \tilde{y}) / \\ &(2 \tilde{y}^* P E \tilde{y}). \end{aligned}$$

进而,可得

$$\begin{bmatrix} \Pi & H & X C^T & Y^T D^T & E^T A_d X & E^T B_d M_0 (I + L_0) X \\ H^T & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C X & 0 & -\frac{1}{2} I & 0 & 0 & 0 \\ D Y & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I & 0 & 0 \\ X A_d^T E & 0 & 0 & 0 & -\beta_{1m}^{-1} G_1 & 0 \\ X [M_0 (I + L_0)]^T B_d^T E & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{2m}^{-1} G_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

其中

$$\Pi = X^T (A^T + K^T (I + L_0)^T M^T B^T \beta_{1m}^T) E + E^T (A + \beta_1 B M_0 (I + L_0) K) X + \beta_{1m} G_1 + \beta_{2m} G_2,$$

则称闭环系统(8)的 H_∞ 扰动抑制度为 γ 。

证明 定义

$$V(x(t)) = x^T(t) E^T P E x(t) + \sum_{k=2}^3 \beta_{km} \int_{t-\tau_k}^t x^T(s) W_k x(s) ds,$$

其中

$$P = X^{-1}, W_k = P G_k P, k = 1, 2, \dots.$$

将 $V(x(t), t)$ 对 t 求导,并根据引理(5),有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), t) &= x^T(t) E^T P E x(t) + x^T(t) E^T P E x(t) + \\ &\dots + \sum_{k=2}^3 \beta_{km} (x^T(t) W_k x(t) - x^T(t - \tau_k) W_k x(t - \tau_k)) = x^T(t) ((A^T + \beta_1 K^T B^T) P E + E^T P (A + \beta_1 B K)) x(t) + \\ &\dots + x^T(t) E^T P D \omega(t) + \omega^T(t) D^T P E x(t) + \dots + 2 \beta_2 x^T(t) E^T P A_d x(t - \tau_1) + \\ &2 \beta_3 x^T(t) E^T P B_d x(t - \tau_2) + \dots + \sum_{k=2}^3 \beta_{km} (x^T(t) W_k x(t) - x^T(t - \tau_k) W_k x(t - \tau_k)) \leq \\ &x^T(t) ((A^T + \beta_1 K^T B^T) P E + E^T P (A + \beta_1 B K)) x(t) + \\ &\dots + x^T(t) E^T P D \omega(t) + \omega^T(t) D^T P E x(t) + \dots + \sum_{k=2}^3 \beta_{km} x^T(t) (E^T P A_k W_k^{-1} A_k^T P E + W_k) x(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &\leq -\alpha \Leftrightarrow T_0 + e^{-\tau_1 \tilde{\omega}} \beta_{2m} (P A_d S_1^{-1} A_d^T P + S_1) + \\ &e^{-\tau_2 \tilde{\omega}} \beta_{3m} (P B_d M K S_2^{-1} K^T M^T B_d^T P + S_2) \leq -2 \alpha P E. \end{aligned} \quad (15)$$

又由 Schur 补引理,式(15)与式(10)等价,证毕。

类似可得式(11)的证明。

在零初始条件和扰动不为零($\omega \in L_2[0, \infty) \neq 0$)的情况下,下面的不等式成立:

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|\omega\|_2,$$

则称闭环系统(6),(7)是具有干扰抑制度是 γ 的 H_∞ 约束。综合考虑区域极点约束,有如下结论:

定理2 取 $r > 0$,若存在对称正定阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, 2, \dots, m$,使得下式成立

$$\begin{bmatrix} \Pi & H & X C^T & Y^T D^T & E^T A_d X & E^T B_d M_0 (I + L_0) X \\ H^T & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C X & 0 & -\frac{1}{2} I & 0 & 0 & 0 \\ D Y & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I & 0 & 0 \\ X A_d^T E & 0 & 0 & 0 & -\beta_{1m}^{-1} G_1 & 0 \\ X [M_0 (I + L_0)]^T B_d^T E & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{2m}^{-1} G_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

其中

$$A_2 = A_d, A_3 = B_d.$$

再考虑性能指标

$$J_{zw} = \int_0^\infty (z^T(t) z(t) - r^2 w^T(t) w(t)) dt,$$

在 $V(x(0), 0) = 0$ 的条件下,有

$$\begin{aligned} J_{zw} &= \int_0^\infty [z^T(t) z(t) - r^2 w^T(t) w(t) + \dot{V}(x(t), t)] dt + \\ &V(x(0), 0) - V(x(\infty), \infty) \leq \int_0^\infty [z^T(t) z(t) - r^2 w^T(t) w(t) + \dot{V}(x(t), t)] dt \leq \int_0^\infty [x^T(t) ((A^T + \beta_1 K^T B^T) P E + E^T P (A + \beta_1 B K) + \dots + \sum_{k=2}^3 \beta_{km} x^T(t) (E^T P A_k W_k^{-1} A_k^T P E + W_k) + (C + D K)^T (C + D K)) x(t) + \dots + x^T(t) E^T P D \omega(t) + \omega^T(t) D^T P E x(t) - r^2 w^T(t) w(t)] dt \leq \int_0^\infty [x^T(t) \Psi x(t) + x^T(t) E^T P D w(t) + w^T(t) D^T P E x(t) - r^2 w^T(t) w(t)] dt \leq \int_0^\infty [x^T(t) \quad w^T(t)] \begin{bmatrix} \Psi & E^T P D \\ D^T P E & -r^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} dt. \end{aligned}$$

其中

$$\Psi = (A^T + \beta_1 K^T [M_0(I + L_0)]^T B^T) P E + E^T P (A + \beta_1 B M_0(I + L_0) K) + \cdots + \sum_{k=2}^3 \beta_{km} x^T(t) \times (E^T P A_k W_k^{-1} A_k^T P E + W_k) + (C + D M_0(I + L_0) K)^T (C + D M_0(I + L_0) K).$$

显然,

$$J_{\infty} < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Psi & E^T P D \\ D^T P E & -r^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (17)$$

在式(17)两端同乘 $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, 可得式(16)。

再将定理1中的矩阵不等式和定理2的不等式联立, 组成不等式组, 即可得到同时满足区域极点约束和 H_{∞} 约束的多指标约束的控制器。

仿真过程中, 为了把不等式组化成 LMI, 由引理4和Schur补引理, 综合式(10), (11)和(16), 可得如下定理:

定理3 存在适维的 $X = P^{-1}$, $S = K P^{-1}$, Y, G_1 ,

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & H & X C^T & Y^T D^T & E^T A_d X & E^T B_d M_0 S & S^T J^{1/2} & 0 \\ * & -Y I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\frac{1}{2} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{2} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_{1m}^{-1} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Pi_{66} & 0 & S^T J^{1/2} \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_6 I \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

其中

$$Y = \gamma^2,$$

$$\Pi_{11} = A + A^T + 2\alpha EX + \sum_{k=2}^3 \beta_{km} e^{\sigma \tau_{km}} \Phi_k + \cdots +$$

$$\varepsilon_1 (\beta_{1m} B M_0) J (\beta_{1m} B M_0)^T + \varepsilon_2 B_d M_0 J (B_d M_0)^T,$$

$$A = AX + \beta_{1m} B M_0 S,$$

$$\Pi_{22} = -\beta_{2m}^{-1} e^{-\sigma \tau_{1m}} \Phi_1,$$

$$\Pi_{33} = -\beta_{3m}^{-1} e^{-\sigma \tau_{2m}} \Phi_2,$$

$$\Xi_{11} = -2\mu(\sigma)EX + \frac{\Psi_0}{2} + \sum_{k=1}^2 \beta_{km} e^{-\sigma \tau_{km}} \Psi_k +$$

$$\varepsilon_3 [(\beta_{1m} B M_0) J (\beta_{1m} B M_0)^T + \cdots +$$

$$(\beta_{1m} B M_0)^T J (\beta_{1m} B M_0)] + \varepsilon_4 (B_d M_0) J (B_d M_0)^T,$$

$$\Xi_{22} = -2\Psi_0,$$

$$\Xi_{12} = (A\Gamma + \beta_{1m} B M_0 S) - (AX + \beta_{1m} B M_0 S)^T,$$

$$\Xi_{33} = -\beta_{1m}^{-1} e^{-\sigma \tau_{1m}} \Psi_1,$$

$G_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ 的极点指标和 H_{∞} 指标的联合 LMI 约束为

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & A_d X & B_d M_0 S & J^{1/2} S^T & 0 \\ * & \pi_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \pi_{33} & 0 & S^T J^{1/2} \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & A_d X & \Xi_{14} & 0 & 0 \\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & S^T J^{1/2} & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 & S^T J^{1/2} \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_3 I & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

$$\Xi_{44} = -\beta_{2m}^{-1} e^{-\sigma \tau_{2m}} \Psi_2,$$

$$\Pi_{11} = X A^T E + E^T A X + E^T \beta_{1m} B M_0 S + S^T (\beta_{1m} B M_0)^T E + \cdots + \beta_{1m} G_1 + \beta_{2m} G_2 + \varepsilon_5 E^T \beta_{1m} B M_0 J (E^T \beta_{1m} B M_0)^T + \varepsilon_6 E^T B_d M_0 J (E^T B_d M_0)^T,$$

$$\Pi_{66} = -\beta_{2m}^{-1} G_2,$$

若此 LMI 不等式组有最优解, 则由 $S = KX$, 可解得满足多指标约束要求的状态反馈阵 $K = SX^{-1}$ 。

3 仿真研究

考虑如式(1)~(3)所示系统, 其中

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1.8 \\ 0 & -1.5 & 0 \\ 0.7 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$m = 2, \tau_{1m} = 0.45, \tau_{2m} = 0.38,$$

$$\beta_{1m} = 1.1, \beta_{2m} = 1.07, \beta_{1m} = 1.3,$$

取执行器故障模型为

$$\text{diag}[m_{1u} \ m_{2u} \ m_{3u}] = \text{diag}[0.9 \ 1 \ 0.8],$$

$$\text{diag}[m_{1l} \ m_{2l} \ m_{3l}] = \text{diag}[0.1 \ 1 \ 0.2],$$

容易计算得到

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

应用 Matlab 中的 feasp() 函数可解得满足约束的

$$S = \begin{bmatrix} -1.324 & 0.123 & 0.015 \\ 0 & -0.145 & 0.130 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} -1.350 & 0 & 0.050 \\ 0.235 & -0.850 & 0 \\ 0 & 0 & 0.250 \end{bmatrix},$$

进而可得反馈控制器为

$$K = SX^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9556 & -0.1447 & -0.1311 \\ 0.0297 & 0.1706 & 0.5141 \end{bmatrix}.$$

4 结束语

给出了一种多指标约束下的时滞广义系统的容错控制策略,通过求解 LMIs 完成了容错控制器的设计,所给出的容错控制器可以抵御传感器故障对系统产生的影响。无论系统是否发生故障,本文中提出的方法都可以使闭环系统的极点保持在指定的圆盘内,与文献[7]比较,本文中的方法更能保证系统的动态性能。

参考文献:

- [1] 俞元洪. 超越函数 $\det(a_{ij} + b_{ij}e^{-\lambda\tau} - \delta_{ij}\lambda)_{n \times n}$ 的零点全分布在复平面左半部的代数判据[J]. 科学通报, 1984, 29: 1413-1415.
YU Yuan-hong. The algebra criterion about transcendental function $\det(a_{ij} + b_{ij}e^{-\lambda\tau} - \delta_{ij}\lambda)_{n \times n}$ which zeros dis-

tributes in the left plane[J]. Chinese Science Bulletin, 1984, 29: 1413-1415.

- [2] XIE L, FU M, De SOUZA C E. H trial mode control and quadratic station of systems with parameter uncertain via output feedback [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(8): 1253-1256.
- [3] YANG Y, YANG G H, SOH Y C. Reliable control of discrete-time systems with actuator failure[J]. IEE Proc-Control Theory Appl, 2000, 147(4): 428-432.
- [4] 王福忠, 姚波, 张嗣瀛. 线性系统区域稳定的可靠控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 835-839.
WANG FU-zhong, YAO Bo, ZHANG Si-ying. Reliable control of regional stabilizability for linear systems [J]. Journal of Control and Application, 2004, 21(5): 835-839.
- [5] 孙金生, 李军, 王执铨. 时滞不确定系统的鲁棒容错控制[J]. 控制理论与应用, 1998, 15(2): 267-271.
SUN Jin-sheng, LI Jun, WANG Zhi-quan. Robust fault-tolerant control of uncertain systems with time-delay [J]. Journal of Control and Application, 1998, 15(2): 267-271.
- [6] 杨建军, 吴方向, 史忠科. 参数不确定性时滞系统的鲁棒 H_∞ 容错控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(3): 442-444.
YANG Jian-jun, WU Fang-xiang, SHI Zhong-ke. Robust H_∞ fault tolerant controller design for linear delay systems with uncertainty [J]. Journal of Control and Application, 2000, 17(3): 442-444.
- [7] 张庆灵, 袁薇. 多时滞不确定广义系统的非脆弱 H_∞ 保成本控制[J]. 东北大学学报, 2007, 28(7): 929-933.
ZHANG Qing-ling, YUAN Wei. Non-fragile H_∞ guaranteed cost control for uncertain singular systems with multiple time-delay [J]. Journal of Northeastern University, 2007, 28(7): 929-933.
- [8] 蒋培刚, 孙宏业, 褚健. 线性不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒镇定方法研究[J]. 控制与决策, 1999, 14(2): 115-119.
JIANG Pei-gang, SUN Hong-ye, CHU Jian. Delay dependent robust stabilization methods for linear uncertain time-delay systems [J]. Control and Decision, 1999, 14(2): 115-119.

(编辑 修荣荣)