文章编号:1673-5005(2009)04-0175-04

非线性二阶周期边值问题的 n 个正解的存在性

姚庆六

(南京财经大学 应用数学系,江苏 南京 210003)

摘要:通过选择适当的控制函数并利用锥上的不动点定理研究了一类非线性二阶周期边值问题的正解存在性与多解性。利用相应线性问题的 Green 函数将边值问题化为积分方程,然后考察该积分方程在锥上的不动点。结果表明,只要非线性项在其定义域的某些有界子集上的增长速度是合适的,该问题至少具有 n 个正解,其中 n 是一个任意的正整数。

关键词:非线性常微分方程;周期边值问题;正解;存在性;多解性

中图分类号:O 175.8　　**文献标识码**:A

Existence of n positive solutions to a nonlinear second-order periodic boundary value problem

YAO Qing-liu

(*Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing* 210003, *China*)

Abstract: By choosing suitable control functions and applying fixed point theorems on cone, the existence and multiplicity of positive solutions were studied for a class of nonlinear second-order periodic boundary value problems. The boundary value problem was transformed into an integral equation by Green's function of corresponding linear problem. Then the fixed points of the integral equation on cone were considered. The results show that the problem has at least n positive solutions provided the growth rates of nonlinear term are appropriate on certain bounded subsets of its domain, where n is an arbitrary positive integral number.

Key words: nonlinear ordinary differential equation; periodic boundary value problem; positive solution; existence; multiplicity

1 问题的提出

设 $k>-\frac{1}{4}$。本文中考察下列非线性二阶周期边值问题(P)的正解

$$\begin{cases}u''(t)-ku(t)=f(t,u(t)),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\\ u(0)=u(2\pi),\ u'(0)=u'(2\pi).\end{cases}$$

这里问题(P)的正解 u^* 是指(P)的满足 $u^*(t)>0$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的解。

周期现象在自然界和工程技术中普遍存在。由于研究各种物理、工程和生物周期过程的需要,二阶周期边值问题历来受到广泛关注[1-6]。实际问题中往往只有正解才有意义,近年其正解的研究也十分活跃[3,5,6]。不过在这些研究中或者要求 $-\frac{1}{4}<k<0$[3,5],或者要求 $k=0$[6]。现有文献尚未涉及 $k>0$ 的情况,本文中将放宽这种限制,允许 $k>0$。

本文中改进文献[5-9]中使用的局部化方法并利用它考察周期边值问题(P),通过引入新的积分方程并利用锥上的不动点指数定理证明两个主要结论。

2 引 理

本文中始终假设

收稿日期:2008-12-20

基金项目:国家自然科学基金项目(10871059)

作者简介:姚庆六(1946-),男(汉族),上海人,教授,硕士,研究方向为应用微分方程。

$f:[0,2\pi]\times[0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$

连续，又设$\|u\|=\max\limits_{0\le t\le 2\pi}|u(t)|$为 Banach 空间 $C[0,2\pi]$ 中的范数。

本文中使用下列假设(H)：存在$0<\lambda<\frac{1}{2}$使得对于任何$(t,u)\in[0,2\pi]\times[0,+\infty)$均有

$$f(t,u)+(k+\lambda)u\ge 0.$$

为了行文方便采用缩写

$$f(t,u)+(k+\lambda)u=F(t,u).$$

本节中始终假设$f(t,u)$满足条件(H)。

记 $G(t,s)$ 是齐次线性问题

$$\begin{cases}u''(t)+\lambda u(t)=0,\ 0\le t\le 2\pi,\\ u(0)=u(2\pi),\ u'(0)=u'(2\pi)\end{cases}$$

的 Green 函数，即如果$0\le s\le t\le 2\pi$，则

$$G(t,s)=\frac{\sin[\sqrt{\lambda}(t-s)]+\sin[\sqrt{\lambda}(2\pi-t+s)]}{2\sqrt{\lambda}[1-\cos(2\sqrt{\lambda}\pi)]};$$

如果$0\le t\le s\le 2\pi$，则

$$G(t,s)=\frac{\sin[\sqrt{\lambda}(s-t)]+\sin[\sqrt{\lambda}(2\pi+t-s)]}{2\sqrt{\lambda}[1-\cos(2\sqrt{\lambda}\pi])}.$$

显然 $G(t,s)>0,\ 0\le t,s\le 2\pi$。设

$$m=\min_{0\le t,s\le 2\pi}G(t,s)=\frac{\cos(\sqrt{\lambda}\pi)}{2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi)},$$

$$M=\max_{0\le t,s\le 2\pi}G(t,s)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi)},$$

$$\sigma=mM^{-1}=\cos(\sqrt{\lambda}\pi),$$

又记

$$C_+[0,2\pi]=\{u\in C[0,2\pi]:\min_{0\le t\le 2\pi}u(t)\ge 0\},$$

$$K=\{u\in C_+[0,2\pi]:\min_{0\le t\le 2\pi}u(t)\ge\sigma\|u\|\},$$

则 K 是 $C[0,2\pi]$ 中的非负函数锥。对于任意的 $r>0$，记

$$\Omega(r)=\{u\in K:\|u\|<r\},$$

$$\partial\Omega(r)=\{u\in K:\|u\|=r\}.$$

问题(P)显然等价于下列问题(P1)：

$$\begin{cases}u''(t)+\lambda u(t)=F(t,u(t)),\ 0\le t\le 2\pi,\\ u(0)=u(2\pi),\quad u'(0)=u'(2\pi).\end{cases}$$

令算子 $T:C_+[0,2\pi]\to C_+[0,2\pi]$ 为：对于 $0\le t\le 2\pi$ 及 $u\in C_+[0,2\pi]$，

$$(Tu)(t)=\int_0^{2\pi}G(t,s)[f(s,u(s))+(k+\lambda)u(t)]\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{2\pi}G(t,s)F(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

容易核验在 $C_+[0,2\pi]$ 中问题(P1)等价于不动点方程

$$Tu=u.$$

因此寻求问题(P)的正解就是寻求算子T在$C_+[0,2\pi]$中的正不动点。

引理 1　$T:K\to K$ 全连续。

证明　利用f在有界集合上的连续性容易证明T为连续算子。利用 Arzela-Ascoli 定理可以证明T为全连续的。设 $u\in K$，则

$$(Tu)(t)\ge\int_0^{2\pi}mF(s,u(s))\mathrm{d}s=mM^{-1}\int_0^{2\pi}MF(s,u(s))\mathrm{d}s\ge mM^{-1}\max_{0\le t\le 2\pi}\int_0^{2\pi}G(t,s)F(s,u(s))\mathrm{d}s=\sigma\|Tu\|.$$

于是 $Tu\in K$ 并且 $T:K\to K$。

为了寻找算子 T 在锥 K 中的不动点，引入 Guo-Lakshmikantham 定理[10]：

引理 2　设 X 是 Banach 空间，K 是 X 中的锥，$T:K\to K$ 是一个全连续算子。

(1) 如果对于任何 $u\in\partial\Omega(r)$ 及 $0<\alpha\le 1$ 均有 $\alpha Tu\ne u$，则不动点指数 $i(T,\Omega(r),K)=1$；

(2) 如果 $\inf\limits_{u\in\partial\Omega(r)}\|Tu\|>0$ 并且对于任何 $u\in\partial\Omega(r)$ 及 $\beta\ge 1$ 均有 $\beta Tu\ne u$，则不动点指数 $i(T,\Omega(r),K)=0$。

3　定理及其证明

引入下列控制函数

$$\varphi(r)=\max\left\{f(t,u)/u:\begin{matrix}0\le t\le 2\pi\\ \sigma r\le u\le r\end{matrix}\right\},$$

$$\psi(r)=\min\left\{f(t,u)/u:\begin{matrix}0\le t\le 2\pi\\ \sigma r\le u\le r\end{matrix}\right\}.$$

在几何上，$\varphi(r)$ 与 $\psi(r)$ 分别描述了非线性项$f(t,u)$在有界集合$[0,2\pi]\times[\sigma r,r]$上的最大增长速度和最小增长速度。

定理 1　假设满足条件(H)并且存在两个正数 a,b 使得$\varphi(a)<-k$，$\psi(b)>-k$，则问题(P)至少有一个正解 $u^*\in K$ 满足

$$\min\{a,b\}<\|u^*\|<\max\{a,b\}.$$

定理 2　假设满足条件(H)并且存在 $2n$ 个正数 $a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n$ 使得对于每一个 $i=1,2,\cdots,n-1$ 有

$$\min\{a_i,b_i\}<\max\{a_i,b_i\}<\min\{a_{i+1},b_{i+1}\}<\max\{a_{i+1},b_{i+1}\},$$

并且对于每一个 $i=1,2,\cdots,n$ 有

$$\varphi(a_i)<-k,\ \psi(b_i)>-k,$$

则问题(P)至少有 n 个正解 $u_i^*\in K$，$i=1,2,\cdots,n$

满足

$$\min\{a_i,b_i\} < \|u_i^*\| < \max\{a_i,b_i\}.$$

定理1的证明 容易看出$a \neq b$。不失一般性,假设$a < b$。

首先证明对于任何$u \in \partial\Omega(a)$及$0 < \alpha \leqslant 1$均有$\alpha Tu \neq u$。如若不然,则存在$\bar{u} \in \partial\Omega(a)$及$0 < \bar{\alpha} \leqslant 1$使得$\bar{\alpha}T\bar{u} = \bar{u}$。

因为$\bar{u} \in K$且$\|\bar{u}\| = a$,可知

$$0 < \sigma a = \sigma\|\bar{u}\| \leqslant \bar{u}(t) \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

故由$\varphi(a)$的定义,对于$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$有

$$F(t,\bar{u}(t)) = f(t,\bar{u}(t)) + (k+\lambda)\bar{u}(t) \leqslant [\varphi(a) + k + \lambda]\bar{u}(t) < \lambda\bar{u}(t).$$

另一方面因为$\bar{\alpha}T\bar{u} = \bar{u}$,知$\bar{u}(t)$应满足微分方程

$$\begin{cases}\bar{u}''(t) + \lambda\bar{u}(t) = \bar{\alpha}F(t,\bar{u}(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\\ \bar{u}(0) = \bar{u}(2\pi),\ \bar{u}'(0) = \bar{u}'(2\pi).\end{cases}$$

从0到2π对这个方程两边积分并注意到

$$\int_0^{2\pi}\bar{u}''(t)\,dt = \bar{u}'(2\pi) - \bar{u}'(0) = 0,$$

可得

$$\lambda\int_0^{2\pi}\bar{u}(t)\,dt = \bar{\alpha}\int_0^{2\pi}F(t,\bar{u}(t))\,dt \leqslant \int_0^{2\pi}F(t,\bar{u}(t))\,dt < \lambda\int_0^{2\pi}\bar{u}(t)\,dt.$$

因为$\int_0^{2\pi}\bar{u}(t)\,dt \geqslant 2\pi\sigma a > 0$,这不可能。从引理1和2可知

$$i(T,\Omega(a),K) = 1.$$

其次,设$u \in \partial\Omega(b)$,则有

$$0 < \sigma b \leqslant \sigma\|u\| \leqslant u(t) \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

根据$\psi(b)$的定义,对于$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$有

$$F(t,u(t)) = f(t,u(t)) + (k+\lambda)u(t) \geqslant \psi(b)u(t) + (k+\lambda)u(t) > \lambda u(t).$$

由此推出

$$\inf_{u\in\partial\Omega(b)}\|Tu\| = \inf_{u\in\partial\Omega(b)}\int_0^{2\pi}G(t,s)F(s,u(s))\,ds \geqslant \inf_{u\in\partial\Omega(b)}\int_0^{2\pi}m\lambda u(s)\,ds \geqslant 2\pi m\lambda\sigma b > 0.$$

下面进一步证明对于任何$u \in \partial\Omega(b)$及$\beta \geqslant 1$均有$\beta Tu \neq u$。如若不然,则存在$\tilde{u} \in \partial\Omega(b)$及$\tilde{\beta} \geqslant 1$使得$\tilde{\beta}T\tilde{u} = \tilde{u}$。这说明$\tilde{u}(t)$应满足微分方程

$$\begin{cases}\tilde{u}''(t) + \lambda\tilde{u}(t) = \tilde{\beta}F(t,\tilde{u}(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(2\pi),\ \tilde{u}'(0) = \tilde{u}'(2\pi).\end{cases}$$

从0到2π对这个方程两边积分可得

$$\lambda\int_0^{2\pi}\tilde{u}(t)\,dt = \tilde{\beta}\int_0^{2\pi}F(t,\tilde{u}(t))\,dt \geqslant \int_0^{2\pi}F(t,\tilde{u}(t))\,dt > \lambda\int_0^{2\pi}\tilde{u}(t)\,dt,$$

这也不可能。从引理1及引理2的(2)有

$$i(T,\Omega(b),K) = 0.$$

利用度数的可加性,

$$i(T,\Omega(b)\setminus\bar{\Omega}(a),K) = i(T,\Omega(b),K) - i(T,\Omega(a),K) = -1.$$

根据Kronecher存在定理,算子T至少有一个不动点$u^* \in \Omega(b)\setminus\bar{\Omega}(a)$。于是问题(P)有一个解$u^* \in K$且$a < \|u^*\| < b$。由于

$$u^*(t) \geqslant \sigma\|u^*\| > \sigma a,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

又知u^*是一个正解。证毕。

定理2的证明直接从定理1推出。

4 涉及增长极限的结论

记增长极限

$$\underline{\varphi}_0 = \liminf_{r\to0}\varphi(r),\ \underline{\varphi}_\infty = \liminf_{r\to+\infty}\varphi(r),$$

$$\bar{\psi}_0 = \limsup_{r\to0}\psi(r),\ \bar{\psi}_\infty = \limsup_{r\to+\infty}\psi(r),$$

$$\underline{f}_0 = \liminf_{u\to0}\min_{0\leqslant t\leqslant2\pi}f(t,u)/u,$$

$$\underline{f}_\infty = \liminf_{u\to+\infty}\min_{0\leqslant t\leqslant2\pi}f(t,u)/u,$$

$$\bar{f}_0 = \limsup_{u\to0}\max_{0\leqslant t\leqslant2\pi}f(t,u)/u,$$

$$\bar{f}_\infty = \limsup_{u\to+\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant2\pi}f(t,u)/u.$$

引理3 下列结论成立:

(1) 如果$\bar{f}_0 < -k$,则$\underline{\varphi}_0 < -k$。

(2) 如果$\bar{f}_\infty < -k$,则$\underline{\varphi}_\infty < -k$。

(3) 如果$\underline{f}_0 > -k$,则$\bar{\psi}_0 > -k$。

(4) 如果$\underline{f}_\infty > -k$,则$\bar{\psi}_\infty > -k$。

证明 仅证(1),其他结论的证明类似。

设$\varepsilon = \frac{1}{2}[-k - \bar{f}_0] > 0$,则存在$d > 0$使得对于任何$(t,u) \in [0,2\pi]\times(0,d]$有

$$f(t,u) \leqslant (-k-\varepsilon)u.$$

于是对于$r \in (0,\delta]$均有$\varphi(r) \leqslant -k-\varepsilon$。这表明$\underline{\varphi}_0 < -k$。证毕。

下列结论涉及非线性项的增长极限.

定理3 假设满足条件(H)并且下列条件之一成立,则问题(P)至少有一个正解$u^* \in K$:

(1) $\underline{\varphi}_0 < -k$并且$\bar{\psi}_\infty > -k$。

(2) $\bar{f}_0 < -k$并且$\underline{f}_\infty > -k$。

(3) $\bar{\psi}_0 > -k$并且$\underline{\varphi}_\infty < -k$。

(4) $\underline{f}_0 > -k$并且$\bar{f}_\infty < -k$。

证明 (1)和(3)直接从定理1推出。(2)从(1)及引理3的(1),(4)推出。(4)从(3)及引理3

的(2),(3) 推出。

5 数值算例

考察问题(P),其中设 $k=\frac{1}{9}$ 并且

$$f(u)=\begin{cases}\frac{1}{4}\sqrt{u}\sin^2\left(\frac{\pi}{2u}\right)-\frac{2}{9}u,\ 0\leqslant u\leqslant 1,\\ \frac{1}{4}-\frac{2}{9}u,\ 1\leqslant u\leqslant 6,\\ \frac{1}{4}-\frac{2}{9}u+100\sqrt{u-6},\ 6\leqslant u<+\infty.\end{cases}$$

选取 $\lambda=\frac{1}{9}$,则 $\sigma=\frac{1}{2}$ 并且 $f(u)$ 满足条件(H)。因为

$$\psi(2)=\min\left\{\frac{1}{4u}-\frac{2}{9}:1\leqslant u\leqslant 2\right\}=$$

$$\frac{1}{8}-\frac{2}{9}=-\frac{7}{72}>-\frac{1}{9}=-k,$$

$$\varphi(6)=\max\left\{\frac{1}{4u}-\frac{2}{9}:3\leqslant u\leqslant 6\right\}=$$

$$\frac{1}{12}-\frac{2}{9}<\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{9}=-k,$$

$$\psi(20)=\min\left\{\frac{1}{4u}-\frac{2}{9}+\frac{100\sqrt{u-6}}{u}:10\leqslant u\leqslant 20\right\}>$$

$$\frac{1}{80}-\frac{2}{9}+\frac{100\times 2}{20}>9>-k.$$

根据定理 2,这个问题有两个正解。因为 $f_0=+\infty$,$f_\infty=-\frac{2}{9}$,上述任何一个正解的存在性均不能从定理 3 推出。

这一事实揭示了定理 1 和 2 的局部存在特征。换句话说,定理 1 和 2 的结论仅依赖于非线性项在某些有界集合上的增长速度,而与非线性项在上述集合以外的状态无关,尤其不涉及非线性项在零点和无穷远处增长速度的极限。

此外因为 $k=\frac{1}{9}>0$,这一结论不能从现有文献中推出。

参考文献:

[1] NIETO J J. Nonlinear second-order periodic boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1988,130(1):22-29.

[2] GOSSEZ J P, PMARI P. Periodic solutions of a second order ordinary differential equation: a necessary and sufficient condition for nonresonance [J]. J Diff Eqns, 1991,94(1):67-82.

[3] JIANG Daqing. On the existence of positive solutions to second order periodic BVPs [J]. Acta Math Scientia, English Ser, 1998,18(1):31-35.

[4] YAO Qingliu. Solvability of discontinuous second-order periodic boundary value problems [J]. Natural Science Journal of Xiangtan University, 2006,28(3):1-5.

[5] 姚庆六. 奇异二阶常微分方程的 n 个正周期解的存在性[J]. 吉林大学学报:自然科学版, 2007,45(2):187-192.

YAO Qing-liu. Existence of n positive periodic solutions of singular second-order ordinary differential equations [J]. J Jilin Univ(Science Edition), 2007,45(2):187-192.

[6] YAO Qingliu. Positive solutions of singular econd-order periodic boundary value problems [J]. App Math Letters, 2007,20(5):583-590.

[7] YAO Qingliu. Existence, multiplicity and infinite solvability of positive solutions to a nonlinear fourth-order periodic boundary value problem [J]. Nonlinear Anal, 2005,63(2):237-246.

[8] 姚庆六. 非线性二阶 Neumann 边值问题的正解[J]. 工程数学学报, 2006,23(6):939-942.

YAO Qing-liu. Positive solutions of nonlinear second-order Neumann boundary value problems [J]. Chinese J Engineering Math, 2006,23(6):939-942.

[9] 姚庆六. 非线性悬臂梁方程解的一个存在定理[J]. 中国石油大学学报:自然科学版, 2007,31(1):159-162.

YAO Qing-liu. An existence theorem of solution to a nonlinear cantilever beam equation [J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural of Science), 2007,31(1):159-162.

[10] GUO Dajun, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear problems in abstract cones [M]. New York: Academic Press, 1988.

(编辑 修荣荣)