

动态松弛方法中虚密度与时间步长的选择

陈新民^{1,2}, 刘传奇¹, 薛世峰¹

(1. 中国石油大学 储运与建筑工程学院, 山东 青岛 266580; 2. 胜利油田 滨南采油厂, 山东 滨州 256600)

摘要:动态松弛方法将静力问题转化成动力问题进行显式迭代求解,通过设置虚密度可加速收敛。针对虚密度影响收敛时步与计算结果的问题,提出影响收敛速度的时步比概念,从节点运动角度推导出时步计算公式,给出密度设定方法,并采用可变形离散单元法进行编程验证。结果表明:节点平衡位置与密度无关;虚密度加速收敛的关键在于不同单元设置不同密度,使得其拥有相同的收敛时步;按照新提出的密度、时步设定方案进行参数设定,加速收敛效果明显。

关键词:动态松弛; 虚密度; 收敛速度

中图分类号:O 302 **文献标志码:**A

Choices of fictitious densities and time step in dynamic relaxation method

CHEN Xin-min^{1,2}, LIU Chuan-qi¹, XUE Shi-feng¹

(1. College of Pipeline and Civil Engineering in China University of Petroleum, Qingdao 266580, China;

2. Binnan Oil Production Plant, Shengli Oilfield, Binzhou 256600, China)

Abstract: Using the dynamic relaxation method, the static problem can be converted into a dynamic one. It can be solved in an explicit iterative scheme. The convergence rate can be accelerated by setting fictitious densities. The problem that how fictitious densities affect the convergence time step and the final result was studied. The factor affecting convergence rate was defined as the ratio of time step. In consideration of node movement, the scheme to set effective densities and time step was proposed. A program using deformable discrete element method was coded to validate the conclusions. The results show that nodes positions are not related to their densities. It is important to keep different elements hold the same convergence time step by setting different densities in fictitious densities method. Setting time step and fictitious densities by the proposed scheme, the convergence rate can be largely accelerated.

Key words: dynamic relaxation; fictitious density; convergence rate

动态松弛法是将线性或非线性静力问题转化为动力问题,通过设置阻尼消耗能量,当位移收敛到平衡位置(即势能最小位置)时,迭代结束的显示求解方法^[1]。Otter^[2]在分析预应力混凝土核容器外壳时首次提出该方法;Cassell 等^[3]引入虚质量的概念;Underwood^[4]对如何设定最有效的阻尼矩阵、质量矩阵进行了研究;David 等^[5]采用动态松弛法进行非线性分析,研究了超弹性结构;Michael^[6]采用此方法进行了受拉结构的找形分析;Li 等^[7]应用动态松弛法求解可变形离散元中的节点运动方程;

Rezaiee 等^[8]对虚质量与阻尼的具体算法进行了系统论述;李士军等^[9]对 Rayleigh 阻尼参数取值进行了分析。当求解包含应力集中或其他局部网格加密的问题时,可通过设置虚密度,提高收敛速度^[10]。对于虚密度影响收敛时步与计算结果的问题,相关文献研究较少。刘波等^[11]从应力波传播角度讨论了不同单元如何设定密度与步长,但未能给出虚密度影响下时步设定的具体表达式。笔者以常应变三角形单元为例,探讨虚密度与时步的设定问题。

1 密度对收敛过程与结果的影响

从节点运动角度,可变形离散单元保持收敛的必要条件是单元 Jacobi 行列式恒大于零。如图 1 所示,在一个时步内,若节点 k 从原位置移动到 k_1 位置,网格未出现畸变,保证在平衡位置附近振动,若移动到 k_2 (Jacobi 行列式为零), k_3 (Jacobi 行列式小于零)位置,则网格畸变,引起发散。

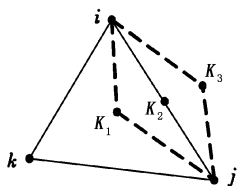


图 1 单元节点位置示意图

Fig. 1 Schematic diagram of nodes position

遍历所有网格,初始状态顶点到对边最小距离记为 $H_{\min}$,则计算收敛的必要条件是: Δt 时间内,内含集中质量的节点位移小于 $H_{\min}$ 。有

$$\frac{1}{2} \frac{F_{\text{ext}}}{m_k} \Delta t^2 < H_{\min} \quad (1)$$

式中, F_{ext} 为 k 节点所受外力, N; m_k 为 k 节点集中质量(在三角形常应变单元中, $m_k = \rho A/3$), kg; A 为单元面积, m^2 ; ρ 为材料密度, kg/m^3 。

将 m_k 带入式(1)中得

$$\Delta t < \sqrt{\frac{2H_{\min}\rho A}{3F_{\text{ext}}}} \quad (2)$$

由式(2)可以明显看出,若单元密度增加,则收敛时间步长可相应增加。

从信息传递角度,迭代收敛的必要条件是当前计算速度必须大于信息传播的最大速度^[11],由此推导的最大收敛时间步长亦正比于密度的 0.5 次方。

针对密度变化影响最终平衡位置改变的问题,考虑单自由度含阻尼强迫振动,其运动方程为

$$\ddot{x} + 2\varepsilon p \dot{x} + p^2 x = F/m \quad (3)$$

其中

$$2\varepsilon p = c/m, \quad p^2 = k/m.$$

式中, ε 为阻尼比; p 为固有频率, rad/s ; m 为节点质量, kg; c 为阻尼系数, $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$; k 为弹簧刚度, N/m ; F 为所受外力, N。

根据杜哈梅积分公式^[12],初始条件为零的情况下,方程(3)的全解为

$$x(t) = \frac{e^{-\varepsilon p t}}{mq} \int_0^t e^{\varepsilon p \tau} \sin[q(t-\tau)] d\tau \quad (4)$$

利用分部积分得到

$$x(t) = \frac{F}{k} \left[1 - e^{-\varepsilon p t} \left(\cos(qt) + \frac{\varepsilon p}{q} \sin(qt) \right) \right] \quad (5)$$

其中, $q = \sqrt{1 - \varepsilon^2} p$, 称为衰减固有频率, rad/s 。

由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{F}{k}$, 故节点平衡位置与密度无关。

若按式(2)设定步长,将 $t = n\Delta t$ 代入式(5),则有

$$x(n) = \frac{F}{k} (1 - B e^{-n\varepsilon \sqrt{\frac{2kH_{\min}}{F_{\text{ext}}}}}) \quad (6)$$

$$B = \cos(qt) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin(qt) \quad (7)$$

由式(6)可以看出, $x(n)$ 与密度无关,即按最大收敛时步进行迭代,收敛速度相同。因而,加快收敛的核心是设定虚密度和步长,使不同单元拥有相同的收敛时步,并且步长尽可能接近最大收敛时步。

2 虚密度与步长设定方法

单元节点运动受弹簧作用力影响,偏离平衡位置位移越大,所受弹簧力越大。弹簧力影响节点加速度,导致节点速度发生变化,单个时步的位移受到影响,反过来,影响下一时步的弹簧力。各因素影响关系如图 2 所示。

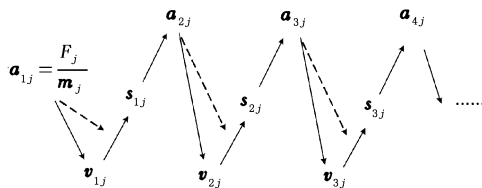


图 2 迭代参数相互影响示意图

Fig. 2 Schematic diagram of iterative parameters mutual influence

图中, a_{ij} 、 v_{ij} 、 s_{ij} 分别表示第 i 步 j 节点的加速度、速度、位移。假设 j 节点的最大收敛时间步长为 Δt_j , 则有

$$v_{1j} = \frac{F_j}{m_j} \Delta t_j, \quad s_{1j} = \frac{F_j}{2m_j} \Delta t_j^2,$$

$$v_{2j} = v_{1j} + \frac{F_j - ks_{1j}}{m_j} \Delta t_j = \frac{2F_j}{m_j} \Delta t_j - \frac{kF_j}{2m_j^2} \Delta t_j^3,$$

$$s_{2j} = v_{1j} \Delta t_j + \frac{1}{2} \frac{F_j - ks_{1j}}{m_j} \Delta t_j^2 = \frac{3F_j}{2m_j} \Delta t_j^2 - \frac{kF_j}{4m_j^2} \Delta t_j^4,$$

...

$$v_{ij} = v_{i-1j} + \frac{F_j - k \sum_{l=1}^{i-1} s_{lj}}{m_j} \Delta t_j, \quad s_{ij} = v_{i-1j} \Delta t_j + \frac{1}{2} \frac{F_j - k \sum_{l=1}^{i-1} s_{lj}}{m_j} \Delta t_j^2,$$

...

采用三次迭代后,节点速度至少衰减为初速度一半的标准,确定时间步长,即: $v_{3j} \leq 0.5v_{1j}$, 带入各自表达式,取等号进行方程运算,则有

$$\frac{3F_j}{m_j}\Delta t_j - \frac{5k_j F_j}{2m_j^2}\Delta t_j^3 + \frac{k^2 F_j}{4m_j^3}\Delta t_j^5 = \frac{1}{2} \frac{F_j}{m_j}\Delta t_j. \quad (8)$$

此方程为一元五次方程,共有 5 个不同的解,分别为

$$\Delta t_{1j} = -\sqrt{(5+\sqrt{15})} \frac{m_j}{k}, \quad \Delta t_{2j} = -\sqrt{(5-\sqrt{15})} \frac{m_j}{k},$$

$$\Delta t_{3j} = 0, \quad \Delta t_{4j} = \sqrt{(5-\sqrt{15})} \frac{m_j}{k},$$

$$\Delta t_{5j} = \sqrt{(5+\sqrt{15})} \frac{m_j}{k}.$$

由于 Δt_j 大于零,当 $0 < \Delta t_j < \sqrt{(5-\sqrt{15})} \frac{m_j}{k}$ 时, $v_{3j} \leq \frac{1}{2}v_{1j}$, 满足条件。

整个过程中未考虑阻尼影响,计算最大收敛时步需添加阻尼影响系数 c , 则 j 节点最大收敛时步为

$$\Delta t_j = c \sqrt{\frac{(5-\sqrt{15})}{3}} \sqrt{\frac{\rho_j A_j}{k}} = c_0 \sqrt{\frac{\rho_j A_j}{k}}. \quad (9)$$

式中, ρ_j 为所设虚密度, kg/m^3 ; A_j 为单元面积, m^2 ; k 为弹簧刚度, N/m ; c_0 为比例系数。

系统的收敛时步为 $\Delta T = \min \{ \Delta t_j \}$, 在实际应用中,首先计算最小单元面积,记为 $A_{\min}$, 假定其密度,将单元 j 的密度设定为

$$\rho_j = \frac{A_{\min}}{A_j} \rho_0. \quad (10)$$

此时,各单元收敛时步相同,再按照

$$\Delta T = c_0 \sqrt{\frac{\rho_0 A_{\min}}{k}} \quad (11)$$

设定步长,其中 c_0 通过反复试算,取为 0.45。

3 编程验证

基于可变形离散单元法进行编程验证。以平面受拉薄板为例,验证理论推导结论以及虚密度设定方案的有效性。计算模型如图 3 所示,由于薄板受集中力作用,采用不均匀网格(图 3(b))。原来连续的节点分裂为夹有弹簧的两个角点,图中每个网格线间均有一对弹簧,方向分别为界面法向与切向。

为减弱由弹簧变形引起的位移不连续,将弹簧刚度设为单元弹性模量的 50 倍^[7],阻尼采用局部阻尼系数 0.8^[13],弹性模量为 20 GPa,泊松比为 0.2,密度为 $1.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,弹簧刚度为 1000 GPa,阻尼系数为 0.8。

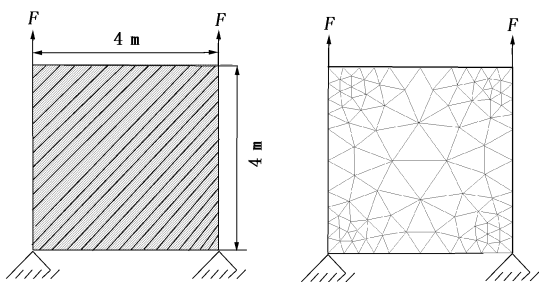


图 3 计算模型示意图

Fig. 3 Schematic diagram of calculation model

采用 C++ 语言编写可变形离散元程序。计算过程为:单元与单元之间通过弹簧相连,根据单元节点的相对位移计算弹簧作用力,采用高斯定理和 Wilkins 的大变形^[14]有限差分法计算单元变形力,采用局部无黏性阻尼计算阻尼力,按照动态松弛法不平衡力—加速度—速度—位移—不平衡力的顺序进行迭代,当不平衡力数值小于预定值时,迭代完成。需要指出,速度与位移的求解是按照中心差分格式进行的。

图 4 为可变形离散元法和有限元软件 ANSYS 的计算结果, Y 向最大位移分别为 $4.6 \times 10^{-7} \text{ m}$ 和 $4.7 \times 10^{-7} \text{ m}$, 两种结果的相对误差为 2.1%。通过改变单元密度进行计算,结果并未发生变化。

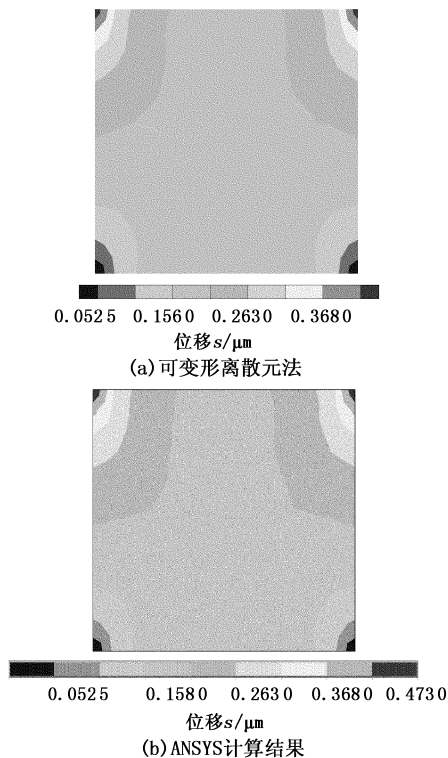


图 4 可变形离散元法和 ANSYS 软件的计算结果

Fig. 4 Computed result of deformable discrete element method and ANSYS software

选取顶部左节点的内力作为参照,分别对各单元具有相同密度、不同密度的情况进行讨论,以验证推导结论及虚密度、步长设定方案的有效性。

3.1 不同单元具有相同密度

对比 3 种相同密度下的最大收敛时步与公式(11)的估计时步,如表 1 所示。其中最大收敛时步通过反复试算求得。

表 1 收敛时步与估计时步对照

Table 1 Comparison of convergence and estimated time step

密度 $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	最大收敛时步/ 10^{-5} s	公式估计时步/ 10^{-5} s
1.8×10^3	0.288	0.276
1.8×10^4	0.911	0.873
1.8×10^5	2.880	2.760

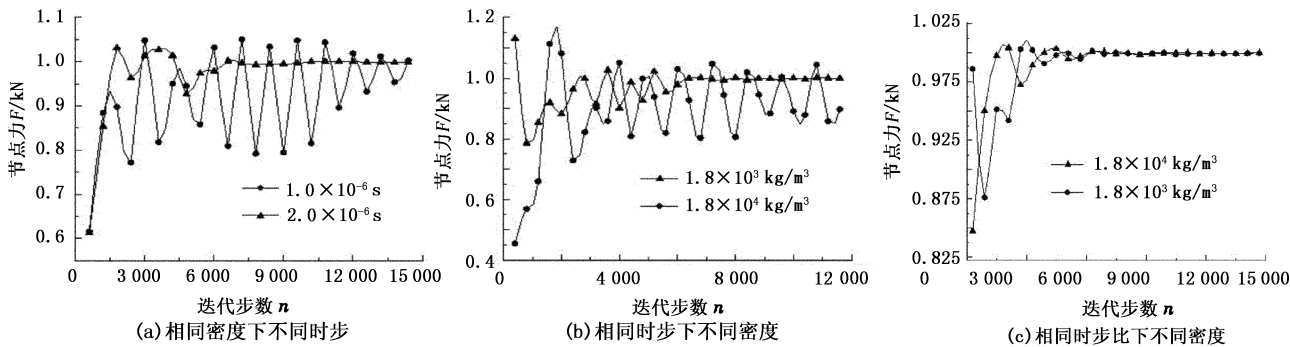


图 5 相同密度下不同步长对照收敛曲线

Fig. 5 Comparison of convergence curve in different time step under same density

(2)时步相同($2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$),密度不同时,收敛曲线如图 5(b)所示。由图 5(b)可以看出,密度增加,收敛速度减缓。这是由于密度增加,则最大收敛时步增加,而时步恒定,则时步比减小,因而放缓了收敛速度。

(3)时步比均为 1,密度不同时,收敛曲线如图 5(c)所示。由图 5(c)可以看出,时步比相同时,迭代速度相差不大,验证了按最大收敛时步进行迭代,收敛速度相同的结论。

3.2 不同单元具有不同密度

虚密度加速收敛的核心在于不同单元设定不同的密度,按照公式(10)进行密度设定,公式(11)进行时步设定,对比真实密度下按照最大收敛时步进行迭代的收敛曲线,如图 6 所示。由图 6 可以看出,按照本文所述方法进行密度设定,时步设定,加速收敛效果十分明显,验证了此方法的有效性。

由表 1 可以看出,密度增加,最大收敛时间步长相应增加,按照式(11)进行步长估计,可在保证收敛的前提下,较大幅度地接近最大收敛时步。

定义 $r = \frac{\Delta T}{\Delta T_{\max}}$,称为时步比, ΔT 为设定时步, $\Delta T_{\max}$ 为收敛的最大时步,为验证收敛速度与时步比有关,进行 3 种情况的讨论:

(1)密度相同($1.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$)、时步不同时,收敛曲线如图 5(a)所示。由图 5(a)可以看出,时步增加,收敛速度加快,这是由于密度不变,最大收敛时步不变,若时步增加,则时步比增加,增大了收敛速度。

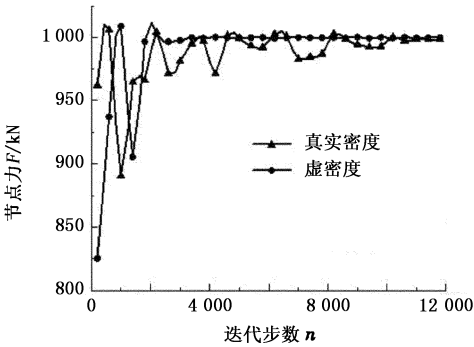


图 6 真实密度与虚密度对照收敛曲线

Fig. 6 Comparison of convergence curve in actual density and fictitious density

4 结 论

- (1)虚密度增大,可增大收敛时步。
- (2)收敛速度与时步比有关,时步比越大,收敛速度越快。