

冗余提升多小波包的构造及其应用

陈敬龙^{1,2}, 张来斌², 杨 霖²

(1. 中原石油勘探局 勘察设计研究院, 河南 濮阳 457001; 2. 中国石油大学 机械与储运工程学院, 北京 102249)

摘要:针对提取隐藏在原始振动信号中的弱周期性冲击信号,提出结合冗余提升多小波包(RLSMWP)及滑动窗奇异值分解(SWSVD)降噪的方法。利用提升方案实现具有 5 阶逼近阶性质的冗余 Haar 预处理,对信号进行预滤波,获得 2 重矢量信号。对多小波分解得到的矢量细节信号进行进一步分解,实现冗余提升多小波包变换。对最后一层各输出通道信号进行 SWSVD 降噪,重构后获得降噪信号。结果表明,RLSMWP 与 SWSVD 相结合具有很好的降噪效果,提取出了隐藏在气阀振动信号中的弱周期性冲击成分;与传统多小波构造方法相比,新方法在时域实现了预滤波、多小波分解、多小波重构及后处理,具有计算简单、节省内存、运算速度快、可完全重构等优点。

关键词:提升多小波包; 冗余算法; 奇异值分解; 故障诊断

中图分类号: TH 17

文献标志码: A

Construction of redundant lifting scheme multi-wavelet packets and its application

CHEN Jing-long^{1,2}, ZHANG Lai-bin², YANG Lin²

(1. Survey and Design & Research Institute, Zhongyuan Petroleum Exploration Bureau, Puyang 457001, China;

2. College of Mechanical and Transportation Engineering in China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

Abstract: Aiming at the extraction of weak period impact components buried in original signal, a novel method to combine redundant lifting scheme multi-wavelet packets (RLSMWP) and sliding window singular value decomposition (SWSVD) was developed. Original signal was pre-filtered by redundant Haar preprocessing with five approximation order, and vector signal was calculated. The vector approximation signal was calculated by redundant updaters and rescaled and decomposed furthermore. The redundant lifting scheme multi-wavelet packet transform was realized. Every output channel signal on the last level was denoised using SWSVD, then signal was reconstructed using reconstruction algorithm. The results show that the noise reduction effect is good using RLSMWP-SWSVD method, and the weak fault signal of a valve was extracted from the strong vibration background. Compared with the traditional multi-wavelet construction algorithm, the new method achieves prefiltering, multi-wavelet decomposition, multi-wavelet reconstruction and post-processing in the time domain. The new method is characterized by simple calculation and high computing speed. It can save memory and can be completely reconstructed.

Key words: lifting scheme multi-wavelet packets; redundant algorithm; singular value decomposition; fault diagnosis

多小波可同时满足正交性、短支撑、对称性、高消失矩及高逼近阶性质,具有更好的信号分解效果^[1]。目前常用的多小波包括 GHM 多小波^[2]、CL 多小波^[3]和 CARDBAL 平衡多小波^[4]等,传统多小波利用分形理论及 Fourier 变换等方法构造,计算复杂。Sweldens 等^[5-7]给出了用提升方案构造单小波的方法,随后 Davis 等^[8]给出了多小波的提升框架,

Fritz^[9]利用提升方案构造了双正交多小波, Amir 等^[10]利用三次 Hermite 样条作为预测器,实现了在时域构造多小波, Yuan 等^[11]构造了自适应提升多小波。已有方法中提升多小波采用下采样运算,每分解一次,信号长度减半,不能完全保留信号中的弱周期性冲击成分^[12],而且传统的软、硬阈值处理会滤除大量的有用信息,不利于机械故障特征提

取^[13]。笔者利用冗余提升方案实现多小波包变换,用滑动窗奇异值分解降噪代替软、硬阈值处理。

1 提升多小波理论

$\Phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_r(t)]^T$ 为 r 重尺度函数,且满足以下两尺度方程^[1]:

$$\begin{cases} \Phi(t) = \sqrt{2} \sum_k \mathbf{H}[k] \phi(2t - k), \\ \Psi(t) = \sqrt{2} \sum_k \mathbf{G}[k] \phi(2t - k). \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{H}[k]$ 和 $\mathbf{G}[k]$ 为 $r \times r$ 的矩阵,分别为低通和高通滤波器。

多小波分解公式为

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{j-1,n} = \sum_k \mathbf{H}_{k-2n} \mathbf{T}_{j,k}, \\ \mathbf{W}_{j-1,n} = \sum_k \mathbf{G}_{k-2n} \mathbf{T}_{j,k}. \end{cases} \quad (2)$$

多小波重构公式为

$$\mathbf{T}_{j,k} = \sum_n \mathbf{H}_{k-2n}^T \mathbf{T}_{j-1,n} + \sum_n \mathbf{G}_{k-2n}^T \mathbf{W}_{j-1,n}. \quad (3)$$

式中, $\mathbf{T}$ 为 r 维矢量逼近信号; $\mathbf{W}$ 为 r 维矢量细节信号。

利用提升方案可在时域实现多小波的构造,提升方案包括3个步骤:剖分、预测及更新^[5]。

(1) 剖分。将输入矢量信号 $F[n]$ 分解为偶样本 $F_e[n] = F[2n]$ 和奇样本 $F_o[n] = F[2n+1]$ 。

(2) 预测。用奇样本附近的偶样本对其进行预测,预测误差为细节信号。 $D[n] = F_o[n] - P(F_e[n])$, 其中, P 为预测器。

(3) 更新。用细节信号对偶样本进行更新,更新结果为逼近信号。 $C[n] = F_e[n] + U(D[n])$, 其中, U 为更新器。

2 冗余提升多小波包变换

冗余提升多小波包分解步骤包括预处理、预测、更新和尺度调整,重构步骤是分解的逆过程。以2重多小波($r=2$)为研究对象。

2.1 冗余提升 Haar 预滤波

设原始信号 $X = (x(1), x(2), \dots, x(N))$, 将其分解为矢量信号 $\mathbf{F} = (F_1, F_2)^T$, 计算公式为

$$D(k) = x(k+1) - x(k), \quad (4)$$

$$s'(k) = x(k) + dd(k)/2, \quad (5)$$

$$s(k) = s'(k), \quad (6)$$

$$d(k) = 2D(k). \quad (7)$$

按式(4)~(7)实现的 Haar 滤波器具有3阶逼近性,为保留冗余提升多小波的4阶逼近性,需增加

Haar 滤波器的逼近阶,对 $s(k)$ 进行进一步处理。

$$u(k) = s(k) - \frac{1}{48}[d(k+3) - d(k-1)]. \quad (8)$$

可得输入矢量信号为

$$\begin{cases} f_1(k) = \frac{1}{2}u(k), \\ f_2(k) = d(k). \end{cases} \quad (9)$$

将冗余提升 Haar 预滤波看成第零层分解,设第 i 层分解得到的第 j 输出通道信号用 $X_{i,j}$ 表示,则 $X_{0,1} = F_1, X_{0,2} = F_2$ 。

2.2 冗余提升多小波包分解

以三次 Hermite 样条作为预测器,预测系数^[10]为

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

更新系数为对应预测系数的一半,即

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \frac{1}{2}\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{U}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

去掉剖分运算,第一层冗余提升多小波包分解的预测公式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{1,3}(k) \\ x_{1,4}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix} - \\ &\left\{ \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} f_1(k+1) \\ f_2(k+1) \end{bmatrix} + \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} f_1(k-1) \\ f_2(k-1) \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $x_{1,3}$ 和 $x_{1,4}$ 为细节信号,表征原始信号中的高频信息。

第一层冗余提升多小波包分解的更新公式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{1,1}(k) \\ x_{1,2}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \end{bmatrix} + \left\{ \mathbf{U}_1 \begin{bmatrix} x_{1,3}(k+1) \\ x_{1,4}(k+1) \end{bmatrix} + \right. \\ &\left. \mathbf{U}_2 \begin{bmatrix} x_{1,3}(k-1) \\ x_{1,4}(k-1) \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $x_{1,1}$ 和 $x_{1,2}$ 为逼近信号,表征原始信号中的低频信息。

对更新后得到的矢量逼近信号进行尺度调整,将 $x_{1,2}$ 乘以2,即

$$x_{1,2}(k) = 2x_{1,2}(k). \quad (12)$$

推广到一般情形,给出第 m 层冗余提升多小波

包分解的时域计算公式。假设已知输入矢量信号 $(x_{m-1,1}, x_{m-1,2}, \dots, x_{m-1,2^m})^T$, 预测公式为

$$\begin{bmatrix} x_{m,2l+1}(k) \\ x_{m,2l+2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{m-1,l}(k) \\ x_{m-1,l+1}(k) \end{bmatrix} - \left\{ \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} x_{m-1,l}(k+2^{m-1}) \\ x_{m-1,l+1}(k+2^{m-1}) \end{bmatrix} + \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} x_{m-1,l}(k-2^{m-1}) \\ x_{m-1,l+1}(k-2^{m-1}) \end{bmatrix} \right\},$$

$$l = 1, 3, 5, \dots, 2^m - 1. \quad (13)$$

式中, $x_{m,2l+1}$ 和 $x_{m,2l+2}$ 为细节信号。

更新公式如下:

$$\begin{bmatrix} x_{m,2l-1}(k) \\ x_{m,2l}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{m-1,l}(k) \\ x_{m-1,l+1}(k) \end{bmatrix} + \left\{ \mathbf{U}_1 \begin{bmatrix} x_{m,2l+1}(k+2^{m-1}) \\ x_{m,2l+2}(k+2^{m-1}) \end{bmatrix} + \mathbf{U}_2 \begin{bmatrix} x_{m,2l+1}(k-2^{m-1}) \\ x_{m,2l+2}(k-2^{m-1}) \end{bmatrix} \right\},$$

$$l = 1, 3, 5, \dots, 2^m - 1. \quad (14)$$

式中, $x_{m,2l-1}$ 和 $x_{m,2l}$ 为逼近信号。

对更新后得到的信号 $x_{m,2l}$ 进行尺度调整,即

$$x_{m,2l} = 2x_{m,2l}, l = 1, 3, 5, \dots, 2^m - 1. \quad (15)$$

2.3 冗余提升多小波包重构

由式(10) ~ (15) 可得到冗余提升多小波包变换的重构算法。

(1) 恢复尺度调整

$$x_{m,2l} = \frac{1}{2}x_{m,2l}, l = 1, 3, 5, \dots, 2^m - 1. \quad (16)$$

(2) 恢复更新

$$\begin{bmatrix} c_{m,2l-1}(k) \\ c_{m,2l}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{m,2l-1}(k) \\ x_{m,2l}(k) \end{bmatrix} - \left\{ \mathbf{U}_1 \begin{bmatrix} x_{m,2l+1}(k+2^{m-1}) \\ x_{m,2l+2}(k+2^{m-1}) \end{bmatrix} + \mathbf{U}_2 \begin{bmatrix} x_{m,2l+1}(k-2^{m-1}) \\ x_{m,2l+2}(k-2^{m-1}) \end{bmatrix} \right\},$$

$$l = 1, 3, 5, \dots, 2^m - 1. \quad (17)$$

(3) 恢复预测

$$\begin{bmatrix} c_{m,2l+1}(k) \\ c_{m,2l+2}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{m,2l+1}(k) \\ x_{m,2l+2}(k) \end{bmatrix} + \left\{ \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} c_{m,2l-1}(k+2^{m-1}) \\ c_{m,2l}(k+2^{m-1}) \end{bmatrix} + \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} c_{m,2l-1}(k-2^{m-1}) \\ c_{m,2l}(k-2^{m-1}) \end{bmatrix} \right\},$$

$$l = 1, 3, 5, \dots, 2^m - 1. \quad (18)$$

(4) 合并

$$x_{m-1,n}(k) = \frac{1}{2} \{ c_{m,2n-1}(k) + c_{m,2n+1}(k) \}, n = 1, 3, 5, \dots, 2^{m-1} - 1. \quad (19)$$

$$x_{m-1,n}(k) = \frac{1}{2} \{ c_{m,2n}(k) + c_{m,2n-2}(k) \}, n = 2, 4, 6, \dots, 2^{m-1}. \quad (20)$$

2.4 后处理

后处理是预处理的逆过程。

$$u(k) = 2f_1(k), \quad (21)$$

$$d(k) = f_2(k), \quad (22)$$

$$s(k) = u(k) + [d(k+3) - d(k-1)]/48, \quad (23)$$

$$D(k) = d(k)/2, \quad (24)$$

$$s'(k) = s(k), \quad (25)$$

$$c_1(k) = s'(k) - D(k)/2, \quad (26)$$

$$c_2(k) = D(k-1) + c_1(k-1). \quad (27)$$

通过合并运算,最终得到标量信号,即

$$x(k) = [c_1(k) + c_2(k)]/2. \quad (28)$$

3 滑动窗奇异值分解降噪

实际测取的信号含有噪声,对信号进行小波包分解后,需对各输出通道信号进行降噪处理。设信号为 $\mathbf{X} = (x(1), x(2), \dots, x(N))$, 对其进行相空间重构。

$$\mathbf{B}_{h \times n} = [x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(n-1)\tau)], t = 1, 2, \dots, h; h = N - (n-1)\tau. \quad (29)$$

式中, n 为嵌入维数; τ 为时间延迟。

对矩阵 $\mathbf{B}_{h \times n}$ 进行奇异值分解:

$$\mathbf{B}_{h \times n} = \mathbf{Z}_{h \times l} \mathbf{S}_{l \times l} \mathbf{V}_{n \times l}^T. \quad (30)$$

矩阵 $\mathbf{S}$ 的非对角元素等于零, 对角元素可能不为零, 且按从大到小的顺序排列。较小的对角元素由噪声引起, 将 $\mathbf{S}$ 中数值较小的对角元素置为 0, 得到矩阵 $\tilde{\mathbf{S}}$, 代入式(30) 中算出一个新的矩阵, 通过相空间构造的逆过程可获取降噪后的信号。

利用奇异熵增量曲线选择降噪阶次, 计算公式为^[14]

$$\Delta E_i = - \left(\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^l \lambda_j} \right) \log \left(\frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^l \lambda_j} \right). \quad (31)$$

式中, λ_i 为矩阵 $\mathbf{S}$ 的第 i 个对角元素。

选择 ΔE_i 曲线开始明显下降时对应的 i 值作为降噪阶次。机械振动信号具有周期性, 将信号按周期划分成不同部分, 相当于给信号加上一个矩形窗, 窗的宽度为信号的一个周期。如果最后一部分信号不够一个周期, 将其作为一个窗。对各窗内的信号分别进行奇异值分解降噪处理。

4 信号处理

4.1 仿真信号降噪

将本文方法用于仿真信号降噪, 并与 GHM 多小波包、Db4 小波包和 Db8 小波包进行对比。仿真信

号为

$$x(t) = \sin(2 \times 50\pi t) + 0.6\sin(2 \times 80\pi t + \pi/4) + 0.3\sin(2 \times 600\pi t + \pi/6) + 0.55\eta(t).$$

分别用冗余提升多小波包结合滑动窗奇异值分解降噪、GHM 多小波包结合滑动窗奇异值分解降噪、Db4 小波包结合硬阈值处理和 Db8 小波包结合硬阈值处理的方法对信号进行降噪,对信号进行 1 层小波包分解。因为频率为 50 Hz 的信号幅值远大于其他信号成分,滑动窗的宽度按照 50 Hz 选取。用信噪比 r_{SN} 和均方差 e_{MS} 评价降噪效果, r_{SN} 越大、 e_{MS} 越小,则降噪效果越好。

$$r_{SN} = 10\lg\left[\sum_{i=1}^L x_i^2 / \sum_{i=1}^L (x_i - x'_i)^2\right], \tag{32}$$

$$e_{MS} = \sqrt{(1/L) \sum_{i=1}^L (x_i - x'_i)^2}. \tag{33}$$

式中, x_i 为不含噪声的信号在 i 时刻的值; x'_i 为降噪后的信号在 i 时刻的值, L 为信号长度。

4 种方法的降噪结果如表 1 所示,可看出本文方法获得了较好的降噪效果。

表 1 几种方法的降噪效果

Table 1 Noise reduction effect of several wavelet packets

信号	r_{SN}/dB	e_{MS}
原始信号	3.7865	0.5488
RLSMWP-SWSVD 降噪信号	9.5411	0.2829
GHM 多小波包-SWSVD 降噪信号	9.0852	0.2982
Db4 小波包-硬阈值降噪信号	6.5780	0.3979
Db8 小波包-硬阈值降噪信号	6.5778	0.3979

4.2 工程应用

某往复压缩机型号为 4HOS-6,压缩介质为天然气,由柴油机带动运转。曲轴额定转速为 860 r/min(周期 0.07 s)。正常工况下该机组第三级排气阀的振动信号如图 1(a) 所示,采样频率为 16 kHz,采样长度为 2 048 个点。某次检修时发现该气阀振动偏大,信号如图 1(b) 所示。为判断故障类型,对信号进行 1 层冗余提升多小波包分解,得到 4 个通道信号,通过滑动窗奇异值分解对各通道信号进行降噪处理,第 3 通道信号的上下包络线见图 2。

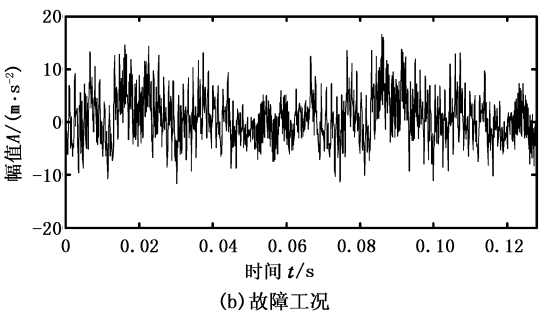
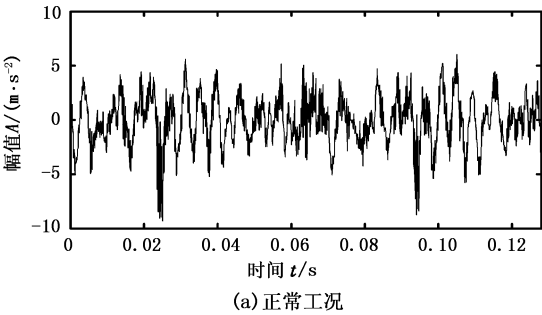


图 1 气阀的原始振动信号

Fig.1 Original vibration signal of valve

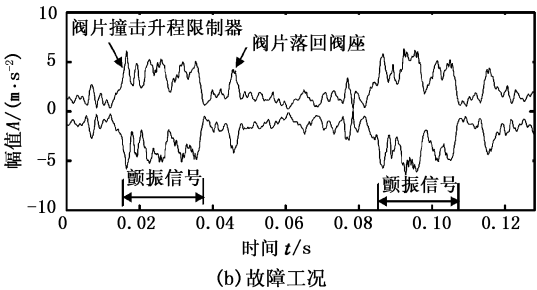
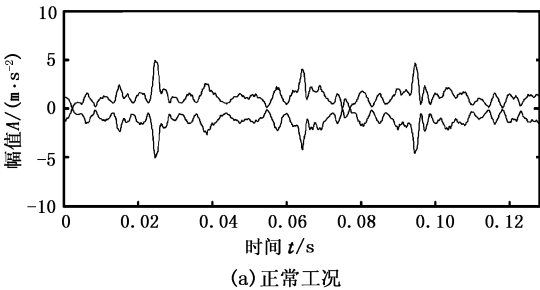


图 2 冗余提升多小波包-滑动窗奇异值分解降噪得到的第 1 层第 3 通道信号

Fig.2 The third band signal on the first level denoised by RLSMWP-SWSVD method

从图 2 可看出,阀片撞击升程限制器和阀座的冲击信号。与正常工况(图 2(a))相比,故障工况(图 2(b))下在排气阶段,阀片振动幅值明显增大,出现了颤振信号。这说明气阀弹簧的刚度不够,在气流推动下阀片不断撞击升程限制器,产生了相应的颤振信号,据此判断该气阀弹簧老化失效。停机

检修结果验证了诊断结论的正确性,更换弹簧后,气阀振动恢复正常。

用经典小波包对原始振动信号进行 2 层分解,小波基为 Db4,对第 2 层的 4 个频带信号进行硬阈值处理,提取第 2 层第 3 频带信号,如图 3 所示,从中得不到有用的信息。

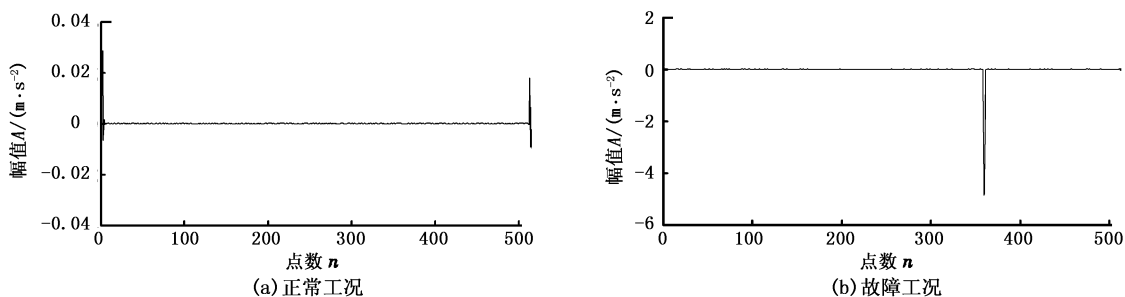


图3 经典小波包-硬阈值降噪得到的第2层第3频带信号

Fig.3 The third band signal on the second level denoised by classical wavelet packet-hard thresholding

5 结 论

(1)与传统多小波相比,新方法最大的优点是在时域实现了多小波的构造。利用提升方案,在时域实现了预滤波、多小波分解、多小波重构及后处理,具有计算简单、节省内存、运算速度快、可完全重构等优点。

(2)冗余提升多小波包与滑动窗奇异值分解降噪相结合,既可较大程度地滤除噪声,又能完整地保留信号中的弱周期性冲击成分,这是经典小波包和传统的软、硬阈值处理难以达到的效果。

(3)利用本文方法能将表征机械碰磨故障特征的振动信息提取出来,可用于曲轴、液阀及十字头等部件的故障诊断。

参考文献:

- [1] 袁静,何正嘉,裴艳阳. 基于提升多小波的机电设备复合故障分离和提取[J]. 机械工程学报,2010,46(1): 79-85.
YUAN Jing, HE Zheng-jia, ZI Yan-yang. Separation and extraction of electromechanical equipment compound faults using lifting multiwavelets[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010,46(1): 79-85.
- [2] GERONIMO J, HARDIN D, MASSOPUST P. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions [J]. Journal of Approximation Theory, 1994, 78:373-401.
- [3] CHUI C K, LIAN J. A study of orthonormal multiwavelets [J]. Applied Numerical Mathematics, 1996, 20(3): 273-298.
- [4] 柳薇,马争鸣. 基于平衡多小波图像变换的视频多描述编码[J]. 中国图像图形学报,2004,9(12):67-72.
LIU Wei, MA Zheng-ming. Multiple description video coding based on balanced multiwavelet image transform [J]. Journal of Image and Graphics, 2004,9(12):67-72.
- [5] SWELDENS W. The lifting scheme: a custom design construction of biorthogonal wavelets[J]. Appl Comput Harmon Anal, 1996,3(2):186-200.

- [6] SWELDENS W. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets [J]. SIAMJ Math Anal, 1997,29(2):511-546.
- [7] DAUBECHIES I, SWELDENS W. Factoring wavelet transform into lifting steps[J]. Fourier Anal App, 1998, 4(3):247-269.
- [8] DAVIS G, STRELA V, TURCAJOVA R. Multiwavelet construction via the lifting scheme[C]//Wavelet Analysis and Multiresolution Methods, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, c1999:57-79.
- [9] FRITZ K. Raising multiwavelet approximation order though lifting [J]. Siam J Math Anal, 2001,32(5): 1032-1049.
- [10] AMIR Z, AVERBUCH, VALERY A Zheludev. Lifting scheme for biorthogonal multiwavelets originated from Hermite splines[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002,50:487-500.
- [11] YUAN Jing, HE Zheng-jia, ZI Yan-yang, et al. Adaptive multiwavelets via two-scale similarity transforms for rotating machinery fault diagnosis [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009,23:1490-1508.
- [12] JIANG Hong-kai, HE Zheng-jia, DUAN Chen-dong. Gearbox fault diagnosis using adaptive redundant lifting scheme [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006,20(8):1992-2006.
- [13] 陈敬龙,张来斌,段礼祥,等. 基于非抽样提升小波包及奇异值分解的液阀故障诊断[J]. 机械工程学报, 2010,46(21):187-192.
CHEN Jing-long, ZHANG Lai-bin, DUAN Li-xiang, et al. Diagnosis of liquid valve based on undedicated lifting scheme packet and singular value decomposition [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010,46(21):187-192.
- [14] WEN Xian-yang, PETER W. Development of an advanced noise reduction method for vibration analysis based on singular value decomposition[J]. NDT and E International, 2003, 36(6):419-432.

(编辑 沈玉英)