

基于盲人探路寻优思想的二阶近似式定点法研究

李春明¹, 朱明烨², 李万腾³

(1. 中国石油大学胜利学院, 山东东营 257061; 2. 东营市胜利第二中学, 山东东营 257051;
3. 东营市胜利第一中学, 山东东营 257027)

摘要:分析一维和二维二阶近似式定点法的迭代点计算公式, 提出基于盲人探路寻优思想的改进算法, 给出算法步骤、程序流程图及计算机子程序。对于目标函数为二次函数正弦的算例, 极值点基本上在由当前点指向极值点的方向上。对于目标函数为二次函数八分之一次方的算例, 极值点在该方向上, 且须反向寻找最优点。对于目标函数为二次函数四次方的算例, 第一个点的迭代点指向极值点, 且步长为当前点离极值点距离的整数分之一。结果表明, 提出的基于盲人探路寻优思想的优化算法具有实用性强、计算量小的优点。

关键词:优化方法; 二阶近似式; 盲人探路寻优思想; 牛顿法

中图分类号:O 224; TP 202 **文献标志码:**A

引用格式:李春明, 朱明烨, 李万腾. 基于盲人探路寻优思想的二阶近似式定点法研究 [J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2017, 41(1):144-149.

LI Chunming, ZHU Mingye, LI Wanteng. Investigation on the second-order approximation point method based on blind walking idea [J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2017, 41(1):144-149.

Investigation on the second-order approximation point method based on blind walking idea

LI Chunming¹, ZHU Mingye², LI Wanteng³

(1. Shengli College in China University of Petroleum, Dongying 257061, China;
2. Shengli No. 2 Middle School of Dongying City, Dongying 257051, China;
3. Shengli No. 1 Middle School of Dongying City, Dongying 257027, China)

Abstract: The one-dimensional and multi-dimensional the second-order approximation fixed iterative point formulas methods were analyzed in this paper. Firstly, the improved optimization algorithm based on the blind walking idea was proposed, where the step algorithm, program flowchart and computer subroutines were given. For the example where the objective function is the quadratic sine function, it is judged that the position of the extreme point is almost in the direction from the current point to the extreme. For the example where the objective function is a quadratic function with the 1/8 power, the extreme point is just in this direction, and the optimal point should be sought in the reversal direction. For the example where the objective function is the aquatic function of one quarter, the iterative point of the first current point points to the extreme point, and the distance from the current point to the extreme point is divided by an integer step. The result shows that the proposed method has the advantages of strong practicability and small amount of calculation, etc.

Keywords: optimization method; the second-order approximation; blind-walking optimization idea; Newton's method

优化方法在油藏生产优化^[1]、驱油试验的参数优化^[2]以及天然气水合物藏的注热水开采试验的参数研究^[3]中发挥着重要作用。一维优化方法作

为多维优化方法的核心算法, 具有较高的研究价值, 其基本假设是目标函数在寻优方向上是单峰函数。一维优化方法可以分为试探类方法、区间削去类方

法、函数拟合类方法和导数辅助定点类方法。一维二阶近似式定点法(牛顿法)属于第四类方法,其数学推导严密,理论价值大。将其推广应用到多维优化问题的求解,则得到多维二阶近似式定点法(多维牛顿法^[4])。多维二阶近似式定点法在通用 Gibbs 反应器的机理建模和求解^[5]、图像处理的压缩感知重建算法^[6]中也起到重要作用。盲人探路算法^[7-8]具有很好的寻优效果,将其用于求解多维有约束优化问题的随机方向法改进,取得了较好的效果^[9]。笔者将该寻优思想用于多维二阶近似式定点法的改进,研究其算法步骤及算例分析。

1 一维二阶近似式定点法

一维二阶近似式定点法也称为牛顿法。通常,根据无穷阶近似级数建立目标函数 $f(x)$ 的近似表达式,然后将其极值点作为新的探测点。取连续可微目标函数在当前点 $x^{(0)}$ 附近的二阶近似多项式作为该函数的近似表达式:

$$\varphi(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + \frac{1}{2!}f''(x^{(0)})(x - x^{(0)})^2. \quad (1)$$

根据极值条件,极值点满足 $f'(x^{(0)}) + f''(x^{(0)})(x - x^{(0)}) = 0$, (2) 即为直线的零点。该直线为目标函数的导函数 $f'(x)$ 在当前点 $x^{(0)}$ 的切线(图 1)。该极值点的计算式为

$$x = x^{(0)} - \frac{f'(x^{(0)})}{f''(x^{(0)})}. \quad (3)$$

在当前点 $x^{(k)}$ 处,由式(3)获得新的探测点为 $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}. \quad (4)$

相当于在目标函数导函数曲线上做切线,以该切线的零点作为新的探测点。其寻优过程如图 1 所示。该方法也称为导函数切线零点法。

对于多峰函数,如果探测点到达极大点或拐点,则由于目标函数一阶导数为零或二阶导数为零而导致寻优失败。因此,须取迭代点为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x. \quad (5)$$

式中, Δx 为给定小值。其收敛精度准则宜选用梯度准则和点距准则。

对于复杂的目标函数,如果初始点离极值点太远,采用一维二阶近似式定点法易发生迭代点在极值点两边交替出现现象,从而导致寻优失败。为增强收敛稳定性,引入阻尼因子($0 < \alpha < 1$),减小新点

相对于当前点的变化值,得到一维二阶近似式阻尼定点法,其迭代公式为

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + (1 - \alpha)(x^{(k)} - f'(x^{(k)})/f''(x^{(k)})). \quad (6)$$

上述阻尼法的步长具有一定的模式,其适用性必然受到限制。如果基于盲人探路思想在探测点劣于当前点时将步长逐步减半试探,则可增强算法的稳定性。

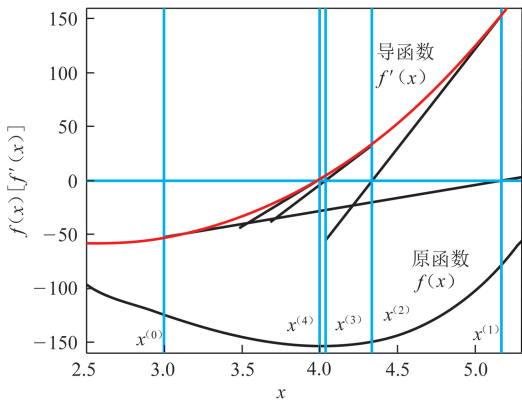


图 1 一维二阶近似式定点法的寻优过程

Fig. 1 Seeking process of one-dimension second-order approximation point method

2 多维二阶近似式定点法的迭代公式

与一维二阶近似式定点法类似,在当前点 $x^{(k)}$ 处取目标函数的二阶近似多项式作为目标函数的近似表达式,表示为

$$f(x) \approx J(x) = f(x^{(k)}) + \nabla^T f(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T \nabla^2 f(x^{(k)})(x - x^{(k)}). \quad (7)$$

其中,二阶偏导数矩阵(海森矩阵) $\nabla^2 f(x^{(k)})$ 为

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}_{x=x^{(k)}}.$$

式(7)的极值点满足:

$$\nabla f(x^{(k)}) + H(x - x^{(k)}) = 0. \quad (8)$$

令该极值点为下一个迭代点 $x^{(k+1)}$,得

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + [-H^{-1} \nabla f(x^{(k)})]. \quad (9)$$

式(9)即多维二阶近似式定点法的迭代公式。

对于非二次函数,有时迭代点目标函数值会上升,从而丧失收敛稳定性,也可引入阻尼因子($0 < \alpha < 1$)得到多维二阶近似式阻尼定点法,其迭代公式为

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha \mathbf{H}^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) . \quad (10)$$

如果将迭代点修正量作为寻优方向进行一维寻优,该方向上的最优点作为新的迭代点 $\mathbf{x}^{(k+1)}$,则称为多维二阶近似式方向法。其寻优效果较好^[10]。

多维二阶近似式定点法及其阻尼法的步长具有固定的模式,与一维方法相同,基于盲人探路思想在探测点劣于当前点时将步长逐步减半试探,也可增强算法的稳定性。

3 基于盲人探路寻优思想的改进

3.1 寻优思想流程

只有二阶近似式极值点优于当前点时才更新当前点,否则退半步探测,如果探测点优于当前点,则将其置为当前点。基于盲人探路寻优思想的二阶近似式定点法的寻优思想流程图见图 2。

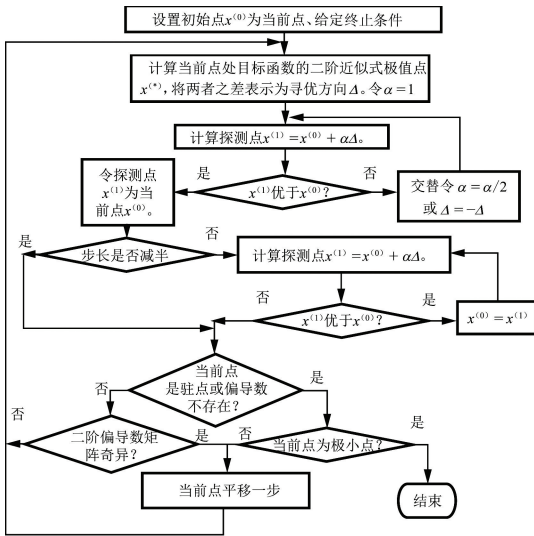


图 2 寻优思想流程图

Fig. 2 Seeking idea flow chart

3.2 算法步骤

- (1) 给定初始点,并设置为当前点;给定终止条件。
- (2) 根据式(9)计算当前点处二阶近似式的极值点,设该极值点与当前点之差为 Δ ;令寻优步长 α 为 1。
- (3) 计算探测点 $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha \Delta$ 。
- (4) 如果 $\mathbf{x}^{(1)}$ 劣于 $\mathbf{x}^{(0)}$,根据一维盲人探路寻优思想交替令 $\alpha = \alpha/2$ 或 $\Delta = -\Delta$,转(3);若 α 足够小,则结束。
- (5) 令探测点 $\mathbf{x}^{(1)}$ 为当前点 $\mathbf{x}^{(0)}$ 。
- (6) 如果步长曾减半,转(8)。
- (7) 按步长 Δ 一步步探测,若探测点优于当前点则将其置为当前点,直到探测点劣于当前点为止。

(8) 如果当前点满足终止条件(当前点梯度的模足够小或偏导数不存在),则转(10)。

(9) 如果二阶偏导数矩阵奇异,则转(11),否则转(2)。

(10) 若当前点与极小值足够接近,则结束寻优。

(11) 参照式(5),当前点平移一步,转(2)。

针对具体的优化问题,有的步骤是多余的,徒增计算量,可舍去。不基于盲人探路寻优思想的算法为步骤(1)、(2)、(3)、(8)~(11)。

3.3 计算子程序部分代码

```
int Second_appro( x0,y0,e,gr );
/* 二阶近似式定点法子程序 */
double x0[2],y0[1],e,gr[2];/* 初始点,初始解(返回最优点),终止条件,梯度 */
{ double x1[2],y1,H_ni[2][2],dx[2];
/* 试探点,二阶偏导数矩阵的逆阵,单步修正量 */

double h; /* 探测步长 */
int i,j,k=0; /* 当前点更新的次数 */
int n=2; /* 以二维为例 */
y0[0]=func( x0[0],x0[1] );
/* 当前点的目标函数值 */
for(;;) /* 计算循环 */
{
gradu( x0[0],x0[1],gr ); /* 目标函数的梯度 */
Hessain( x0[0],x0[1],H_ni );
/* 目标函数的二阶偏导数矩阵及其逆阵 */

dx[0]=-(H_ni[0][0]*gr[0]+H_ni[0][1]*gr[1]);
/* 单步修正量 */
dx[1]=-(H_ni[1][0]*gr[0]+H_ni[1][1]*gr[1]);
h=1.0; i=1; /* 步长,方向标志 */
for(;;) /* 减半步长循环:获得优于当前点的探测点 */
{ for(j=0;j<n;j++)
x1[j]=x0[j]+h*dx[j];
y1=func( x1[0],x1[1] );
/* 探测点及其目标函数值 */
if(y0[0]>y1)
break;
/* 如果探测点比当前点好 */
```

```

if(i == -1)
    { h=0.5 * h;
      i=-i;
    }
else
    { i=-i;
    }
for(j=0;j<n;j++)
    dx[j] = -dx[j];
}
for(i=0;i<n;i++)
    x0[i] = x1[i];
y0[0] = y1; /* 步骤(5) */
if(h>0.9) /* 如果没有步长减半成功的操作,则沿原来的方向一步步走下去 */
    { for(;;) /* 步骤(7) */
      { for(i=0;i<n;i++)
        x1[i] = x0[i] + h * dx[i];
        y1 = func(x1[0], x1[1]);
        /* 探测点及其目标函数值 */
        if(y0[0] > y1)
        { for(i=0;i<n;i++)
          x0[i] = x1[i]; y0[0] = y1;
        }
        else break; /* 如果探测点比当前点好 */
      }
    }
    k=k+1;
    gradu(x0[0], x0[1], gr); /* 目标函数的梯度 */
    if((gr[0] * gr[0] + gr[1] * gr[1]) < e * e)
    { if(zhengding(x0[0], x0[1]) == 1)
      return;
    }
    /* 二阶偏导数矩阵正定,则取当前点为最优
    点,结束寻优 */
    else
    { if(zhengding(x0[0], x0[1]) != 0)
      continue;
    }
    /* 如果二阶偏导数矩阵不奇异,则下一次迭代
    */
    /* 当前点平移一小步,百分之一当前步长 */
    for(i=0;i<n;i++)
        x1[i] = x0[i] + 0.01 * h * dx[i];

```

```

if(zhengding(x1[0], x1[1]) == 0)
    /* 如果仍然奇异,则沿垂直方向平
    移。 */
    { x1[0] = x0[0] + 0.01 * h * dx[1];
      x1[1] = x0[1] - 0.01 * h * dx[0];
    }
    for(i=0;i<n;i++)
        x0[i] = x1[i];
        y0[0] = func(x1[0], x1[1]);
    /* 大的计算循环结束 */
}

```

4 算例分析

4.1 算例一

$$\min f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sin[\varphi(x_1, x_2)], & \varphi(x_1, x_2) < 1.5; \\ \sin 1.5, & \varphi(x_1, x_2) \geq 1.5. \end{cases}$$

其中

$$\varphi(x_1, x_2) = 0.01(x_1 + x_2 - 5)^2 + 0.001(x_1 - x_2)^2.$$

在 $\varphi(x_1, x_2) \in [0, 1.5)$ 内, 点 $\mathbf{x}$ 处的梯度 ∇f

$$(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \text{ 为}$$

$$\begin{bmatrix} \cos[\varphi(x_1, x_2)](0.022x_1 + 0.018x_2 - 0.1) \\ \cos[\varphi(x_1, x_2)](0.018x_1 + 0.022x_2 - 0.1) \end{bmatrix}.$$

二阶偏导数矩阵(海森矩阵) $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ 为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}, \mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{AC - B^2} \begin{bmatrix} C & -B \\ -B & A \end{bmatrix}. \quad (11)$$

其中

$$A = -\sin[\varphi(x_1, x_2)](0.022x_1 + 0.018x_2 - 0.1)^2 +$$

$$0.022\cos[\varphi(x_1, x_2)],$$

$$B = -\sin[\varphi(x_1, x_2)](0.018x_1 + 0.022x_2 - 0.1) \times$$

$$(0.022x_1 + 0.018x_2 - 0.1) + 0.018\cos[\varphi(x_1, x_2)],$$

$$C = -\sin[\varphi(x_1, x_2)](0.018x_1 + 0.022x_2 - 0.1)^2 +$$

$$0.022\cos[\varphi(x_1, x_2)].$$

不采用步骤(7)的算法,如果目标函数不采用分段形式,则寻优结果如表 1 所示。

表 1 不采用分段函数的寻优过程

Table 1 Seeking process of not piecewise functions

当前点 次序	目标函数 调用次数	目标函数值	x_1	x_2
0	1	0.72704	-10.000	8.000
1	2	-0.99539	-27.268	15.598
2	3	-1.00000	-27.582	15.736
3	4	-1.00000	-27.576	15.733

如果目标函数采用分段形式,则寻优结果如表 2 所示。

表 2 采用分段函数的寻优过程

Table 2 Seeking process of piecewise functions

当前点 次序	目标函数 调用次数	目标函数值	x_1	x_2
0	1	7.2704×10^{-1}	-10.0000	8.0000
0	2	2.0560×10^{-1}	7.2676	0.4022
1	3	7.7791×10^{-2}	-1.3662	4.2011
2	4	1.1783×10^{-5}	2.5476	2.4791
3	5	9.0853×10^{-25}	2.5000	2.5000

4.2 算例二

$$\min f(\mathbf{x}) = \sqrt[8]{\varphi_2(x_1, x_2)}.$$

其中

$$\varphi_2(x_1, x_2) = 10(x_1 + x_2 - 5)^2 + (x_1 - x_2)^2.$$

在 $\mathbf{x}$ 处的梯度 $\nabla f(\mathbf{x})$ 为

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8}[\varphi_2(x_1, x_2)]^{-\frac{7}{8}}(22x_1 + 18x_2 - 100) \\ \frac{1}{8}[\varphi_2(x_1, x_2)]^{-\frac{7}{8}}(18x_1 + 22x_2 - 100) \end{bmatrix}.$$

二阶偏导数矩阵(海森矩阵) $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ 为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

其中

$$A = -\frac{7}{64}[\varphi_2(x_1, x_2)]^{-\frac{15}{8}}(22x_1 + 18x_2 - 100)^2 + \frac{22}{8}[\varphi_2(x_1, x_2)]^{-\frac{7}{8}},$$

$$B = -\frac{7}{64}[\varphi_2(x_1, x_2)]^{-\frac{15}{8}}(22x_1 + 18x_2 - 100)(18x_1 + 22x_2 - 100) + \frac{18}{8}[\varphi_2(x_1, x_2)]^{-\frac{7}{8}},$$

$$C = -\frac{7}{64}[\varphi_2(x_1, x_2)]^{-\frac{15}{8}}(18x_1 + 22x_2 - 100)^2 + \frac{22}{8}[\varphi_2(x_1, x_2)]^{-\frac{7}{8}}.$$

不采用步骤(7)的算法,寻优过程如图 3 所示。

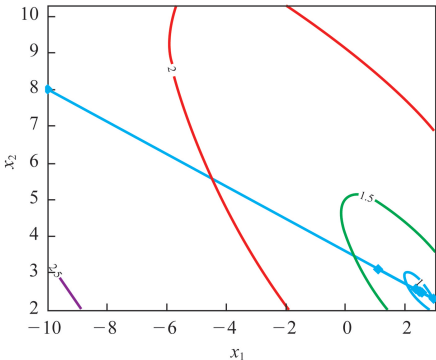


图 3 算例二寻优过程

Fig. 3 Seeking process of example 2

迭代点距离极值点较远,但是均指向极值点。在寻

优过程中须反向才能靠近极值点。

4.3 算例三

$$\min f(\mathbf{x}) = [\varphi_2(x_1, x_2)]^4.$$

在 $\mathbf{x}$ 处的梯度 $\nabla f(\mathbf{x})$ 为

$$\begin{bmatrix} 4[\varphi_2(x_1, x_2)]^3(22x_1 + 18x_2 - 100) \\ 4[\varphi_2(x_1, x_2)]^3(18x_1 + 22x_2 - 100) \end{bmatrix}.$$

二阶偏导数矩阵(海森矩阵) $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ 为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

其中

$$A = 12[\varphi_2(x_1, x_2)]^2(22x_1 + 18x_2 - 100)^2 + 88[\varphi_2(x_1, x_2)]^3,$$

$$B = 12[\varphi_2(x_1, x_2)]^2(22x_1 + 18x_2 - 100)(18x_1 + 22x_2 - 100) + 72[\varphi_2(x_1, x_2)]^3,$$

$$C = 12[\varphi_2(x_1, x_2)]^2(18x_1 + 22x_2 - 100)^2 + 88[\varphi_2(x_1, x_2)]^3.$$

采用不基于盲人探路寻优思想的多维二阶近似式定点法,经过 30 次寻优方向(或步长)的确定和 31 次目标函数的调用,获得最优点为 $[2.3774 \ 2.5539]^T$ 的寻优结果,寻优过程如图 4 所示。

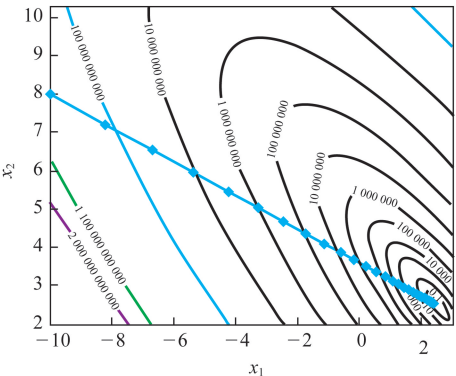


图 4 不基于盲人探路思想的算例三寻优过程

Fig. 4 Seeking process of example 3 without blind walking idea

采用基于盲人探路寻优思想的多维二阶近似式定点法,经过 1 次寻优方向的确定,8 次目标函数调用,获得最优点为 $[2.5 \ 2.5]^T$ 的寻优结果,寻优过程如图 5 所示。当前点的步长为与极值点距离的七分之一。

这 3 个算例的目标函数等值线均为椭圆族,因此寻优方向无异议。如果目标函数为

$$f(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_1^2 + 3x_2^2. \tag{12}$$

初始点不变,基于盲人探路思想的寻优过程如图 6 所示。每条寻优方向上只计算一次目标函数的梯度、海森矩阵及其逆阵,第一个点为不采用本文算

法的迭代点,可见本文算法的计算量小。

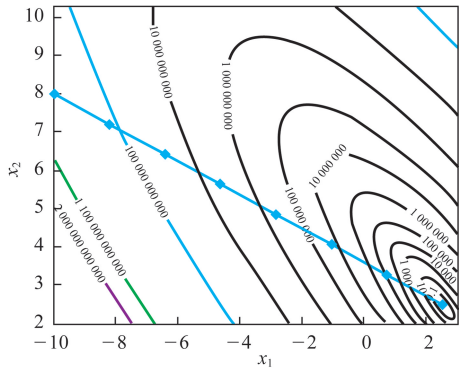


图 5 基于盲人探路思想的算例三寻优过程
Fig.5 Seeking process of example 3 based on blind walking idea

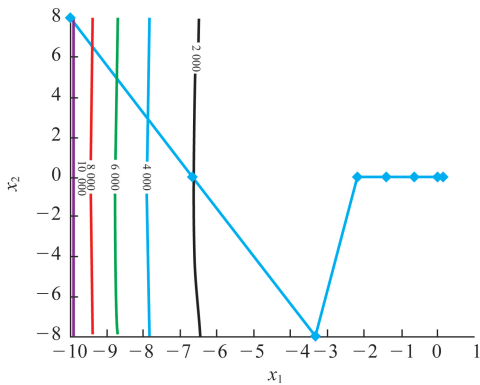


图 6 式(12)的寻优过程
Fig.6 Seeking process of objective function(12)

5 结束语

根据算法的特点以“多维二阶近似式定点法”更名“牛顿型多维优化方法”,给出的一维和多维迭代公式可用于相关优化问题的求解。提出的基于盲人探路寻优思想的优化算法具有实用性强、计算量小的特点。对于算例一和算例二的部分情况,按照式(9)所确定的步长反向才能获得靠近极值点的迭代点,这是因为目标函数的最高幂次小于1,导致牛顿方向不是下降方向。算例二和算例三的极值点在当前点指向迭代点的方向上或其相反方向上。

参考文献:

[1] 姚军,魏绍蕾,张凯,等. 考虑约束条件的油藏生产优化[J]. 中国石油大学学报(自然科学版),2012,36(2):125-129.
YAO Jun, WEI Shaolei, ZHANG Kai, et al. Constrained reservoir production optimization[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2012,36(2):125-129.

[2] 郭平,霍丽君,姜彬,等. 芳 48CO₂ 驱油先导试验区水气交替参数优化[J]. 中国石油大学学报(自然科学

版),2012,36(6):89-93.

GUO Ping, HUO Lijun, JIANG Bin, et al. Parameter optimization of water alternating gas Fang 48 CO₂ flooding pilot area[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2012,36(6):89-93.

[3] 李淑霞,李杰,徐新华,等. 天然气水合物藏注热水开采敏感因素试验研究[J]. 中国石油大学学报(自然科学版),2014,38(2):99-102.

LI Shuxia, LI Jie, XU Xinhua, et al. Experimental study on influencing factors for hydrate dissociation in a hot brine injection process[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2014,38(2):99-102.

[4] 陈莹莹. Quasi-Newton Method 相关综述[J]. 黑龙江科技信息,2012(10):39-40.

CHEN Yingying. Review on Quasi-Newton Method[J]. Heilongjiang Science and Technology Information, 2012(10):39-40.

[5] 郑小青,魏江,葛文锋,等. 通用 Gibbs 反应器的机理建模和求解方法[J]. 计算机工程与应用,2014,50(19):241-244.

ZHENG Xiaoqing, WEI Jiang, GE Wenfeng, et al. First-principle modeling and solving method for universal Gibbs reactor [J]. Computer Engineering and Applications, 2014,50(19):241-244.

[6] 赵瑞珍,林婉娟,李浩,等. 基于光滑 l_0 范数和修正牛顿时法的压缩感知重建算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,2012,24(4):478-484.

ZHAO Ruizhen, LIN Wanjuan, LI Hao, et al. Reconstruction algorithm for compressive sensing based on smoothed l_0 norm and revised Newton method[J]. Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics, 2012,24(4):478-484.

[7] LI Chunming. Blind-walking optimization method[J]. Journal of Network, 2010,5(12):1458-1466.

[8] 李春明. 盲人探路负梯度方向法[J]. 甘肃科学学报,2016,28(5):112-116.

LI Chunming. Polyline negative gradient direction method based on the blind walking idea[J]. Journal of Gansu Sciences, 2016,28(5):112-116.

[9] 李春明. 随机方向法改进及其验证[J]. 计算机仿真,2009,26(1):189-192.

LI Chunming. Improvements of classical random direction optimization methods[J]. Computer Simulation, 2009,26(1):189-192.

[10] ZHANG Chunling. The improvement of Newton method and the validation of optimization idea of blind walking repeatedly[J]. Advanced Materials Research, 2011,250-253:4061-4064.

(编辑 沈玉英)