文章编号:1673-5005(2017)03-0092-06

doi:10.3969/j.issn.1673-5005.2017.03.011

考虑任意压力分布的裂缝诱导应力场 计算模型及其应用

彭 瑀,李勇明,赵金洲

(西南石油大学油气藏地质及开发工程国家重点实验室,四川成都 610500)

摘要:通过复分析和断裂力学 Westergaard 应力函数方法建立局部受均匀内压力作用下的诱导应力分布模型,并以此 为基本单元结合数值积分复化矩形法的思路,叠加得到考虑任意压力分布情况的诱导应力计算模型。采用先计算 再虚实分离的方法进行编程,验证单元模型的精度。模拟缝内压降、裂缝不对称延伸和净压力周期性波动对裂缝诱 导应力的影响。结果表明:经典的裂缝诱导应力模型仅是局部受均匀内压力模型的特解;考虑缝内压降后,远井位 置形成缝网的可能性大幅度下降,天然裂缝的稳定性显著提高;裂缝不对称延伸使裂缝附近的压应力区向短半缝偏 移,但远离裂缝区域的诱导应力仍关于裂缝中垂线对称;缝内净压力周期性波动对诱导应力的影响范围在五分之一 半缝长以内,求解远离裂缝区域的应力时,可以将平均压力直接带入经典公式计算。

关键词:压裂;诱导应力;净压力;不对称延伸;数学模型

中图分类号:TE 357.1 文献标志码:A

引用格式:彭瑀,李勇明,赵金洲.考虑任意压力分布的裂缝诱导应力场计算模型及其应用[J].中国石油大学学报(自然科学版),2017,41(3):92-97.

PENG Yu, LI Yongming, ZHAO Jinzhou. Modeling of fracture induced stress under arbitrary pressure distribution and its application in hydraulic fracturing [J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2017, 41(3):92-97.

Modeling of fracture induced stress under arbitrary pressure distribution and its application in hydraulic fracturing

PENG Yu, LI Yongming, ZHAO Jinzhou

(State Key Laboratory of Oil & Gas Reservoir Geology and Exploitation, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

Abstract: A new fracture induced stress model was established that can calculate the stress distribution around a section of the fracture under local pressure, in which complex analysis and the Westergaard stress function in fracture mechanics were applied. Superposition of the above model to the whole hydraulic fracture, a novel model that can compute the induced stress around the fracture under arbitrary pressures was then developed. The simulation results show that the new model has high calculation accuracy, and the classical model can be as a special case of the new model. In the simulation of the influence of pressure drop, asymmetric propagation and net pressure undulate on the induced stress, the results show that, when the pressure drop is taken into consideration, the possibility for the formation of a fracture net is decreasing rapidly from wellbore to fracture tip, but the stability of natural fracture, while the stress distribution far from the fracture is still symmetrical to the mid-perpendicular. The affection of the net pressure undulate is within one fifth of the half fracture length. So in this case, the average pressure can be taken into the classical model to calculate the stress distribution far from the fracture face. **Keywords**; hydraulic fracturing; induced stress; net pressure; asymmetric propagation; mathematical model

基金项目:国家自然科学基金重大项目(51490653);国家"973"重点基础研究发展计划(2013CB228004)

作者简介:彭瑀(1988-),男,博士研究生,研究方向为油气藏压裂酸化理论与应用。E-mail:pengyu_frac@foxmail.com。

通讯作者:赵金洲(1962-),男,教授,博士,博士生导师,研究方向为油气藏压裂酸化理论与应用。E-mail:zhaojz@ swpu.edu.cn。

收稿日期:2016-06-28

水力裂缝周围的诱导应力分布对于分段压裂缝 间应力干扰^[1]、后续裂缝起裂^[2-3]和原有天然裂缝 (结构弱面)的稳定性^[45]具有重要影响。国内外学 者针对该问题展开了大量研究, Atkinson 等^[6]通过 解析和数值方法研究了近井弯曲裂缝的应力和位移 分布规律: Taghichian 等^[7] 通过商业软件模拟了水 力裂缝应力阴影区域的尺寸和特征:Cheng、Bunger 和 Dahi 等^[8-10]分别通过解析、有限元和扩展有限元 方法研究了在诱导应力影响下水力裂缝和天然裂缝 的相互作用机制。但目前多数文献中都没有考虑缝 内流体压降对诱导应力的影响,还缺少一种快速、准 确的可以计算任意缝内压力分布的诱导应力模型。 笔者在前人研究的基础上,通过复分析和 Westergaard 应力函数方法建立局部受均匀压力作用下的 诱导应力分布模型,并验证其精度,借鉴数值积分的 思路,叠加得到考虑任意压力分布情况的诱导应力 计算模型,并模拟水力裂缝缝内压降、裂缝不对称延 伸和净压力周期波动对应力分布的影响。

1 单元模型的建立与求解

根据 Westergaard 的理论^[11-12],若有一解析函数 Z 能够令形如式(1)的应力函数满足 I 型裂纹的等 应力边界条件,则根据解析函数的性质和柯西黎曼 条件可以得到其应力分布,

$$\Phi = \operatorname{Re} \overline{Z} + y \operatorname{Im} \overline{Z}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z', \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z', \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z'. \end{cases}$$

$$(2)$$

其中

$$\overline{Z} = \int Z dz, \ \overline{\overline{Z}} = \int \overline{Z} dz, \ Z' = \frac{\partial Z}{\partial z}, \ z = x + iy.$$

式中, Z 为某一解析函数, MPa; z 为解析函数 Z 的自 变量, m; x 和 y 为直角坐标参数, m。

求解裂缝在任意局部均匀压力作用下的诱导应力 分布模型,假设在无限大地层中有一条处在平面应变 状态的裂缝,长2a。以裂缝中心为原点,缝长方向为 x 轴,缝面法向为 y 轴建立直角坐标系,如图1所示。

Tada 等^[13]通过对缝面任意位置受集中应力作 用解的卷积得到了解析函数 *Z*:

$$Z = \frac{p_n}{\pi} \left[\arcsin \frac{a^2 - cz}{a(z - c)} - \arcsin \frac{a^2 - bz}{a(z - b)} + \right]$$

$$\frac{z \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) - z \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[\right].$$
(3)

式中,a、b和c为图1中对应点横坐标,m; p_n 为某一段所受均匀内压,MPa。



图 1 计算任意压力作用下裂缝诱导应力的基本单元 Fig. 1 Basic computation element of induced stress under arbitrary inner pressure

计算式(2)还需要解析函数 Z 的导数,对式(3) 求导可得:

$$Z' = \frac{p_n}{\pi} \left\{ \frac{1}{z - b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{z^2 - a^2}} - \frac{1}{z - c} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{z^2 - a^2}} + \frac{\arcsin(c/a) - \arcsin(b/a)}{\sqrt{z^2 - a^2}} - z^2 (z^2 - a^2)^{-3/2} \left[\arcsin(c/a) - \arcsin(b/a) \right] + z (z^2 - a^2)^{-3/2} (\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - b^2}) \right\}.$$
(4)

通常在采用 Westergaard 应力函数方法求解弹 性力学问题时^[14],会要求对式(3)和式(4)进行虚 实分离,得到直观的应力分布表达式。但观察式 (3)和式(4)可以发现,其虚实分离相当困难,即便 将反三角函数代换成对数函数^[15],其结果仍然须按 照[-a,0]、[-c,0]、[-b,0]、[0,0]、[b,0]、[c,0]、 [a,0]7个点展开复变函数^[16],导致最终解分为8 个区域,十分不利于计算,因此笔者在编程时采用了 先计算再分离的思路,并不直接对式(3)和式(4)进 行处理,而是将 a、b、c、z 等参数赋值按照复变函数 运算规则计算得到复数解后,再对其进行虚实分离 带入式(2)。

2 单元模型的验证

根据上述方法编程计算得到的缝面任意位置 (此例取 b=0.5a, c=0.6a)受均匀压力作用下的 y方向正应力分布如图 2(a)所示,当 b=-a, c=a时, 计算结果如图 2(b)所示。

从图 2(a)可以看出,在缝内局部区域受均匀内 压作用时,裂缝尖端仍然具有奇异性,应力分布明显 不再关于中垂线对称,图 2(b)模拟的结果与使用经 典解析模型计算的结果完全一致^[17],证明式(2)~ (4)构成的缝内局部区域受均匀内压作用的诱导应 力解正确,原有的经典解析模型只是该模型的特例 (b=-a,c=a)。进一步根据数值积分复化矩形法的 思路,在求解任意压力作用下的诱导应力分布时,可 以将其近似表示为 n 个局部均匀压力导致的诱导应 力之和,显然 n 越大,求解结果越精确。根据内压力 变化,累次叠加后的解析函数 Z 及其导数可以表达 为

$$Z = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i + p_{i+1}}{2\pi} \left[\arcsin \frac{a^2 - d_{i+1}z}{a(z - d_{i+1})} - \arcsin \frac{a^2 - d_i z}{a(z - d_i)} + \frac{z \arcsin(d_{i+1}/a) - z \arcsin(d_i/a)}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2} - \sqrt{a^2 - d_i^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right],$$

$$Z' = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i + p_{i+1}}{p_i + p_{i+1}} \int \frac{1}{2\pi} - \sqrt{a^2 - d_i^2}}{\sqrt{a^2 - d_i^2}} = \frac{1}{2\pi} - \sqrt{a^2 - d_{i+1}^2} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sqrt{a^2 - d_i^2}}{a(z - d_i)} + \frac{1}{2\pi} + \frac$$

$$Z = \sum_{i=1}^{2} \frac{2\pi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z - d_i} \sqrt{\frac{1}{z^2 - a^2}} - \frac{1}{z - d_{i+1}} \sqrt{\frac{1}{z^2 - a^2}} + \frac{\arcsin(d_{i+1}/a) - \arcsin(d_i/a)}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{z^2(z^2 - a^2)^{-3/2} [\arcsin(d_{i+1}/a) - \arcsin(d_{i+1}/a)]}{1 + z(z^2 - a^2)^{-3/2} (\sqrt{a^2 - d_{i+1}^2} - \sqrt{a^2 - d_i^2}) \right\}.$$
(6)

式中, d_i 为按缝长方向进行离散分段的第i个结点; p_i 为对应结点的压力, MPa;n为总的离散段数。

3 压降对诱导应力的影响

Economides 等^[18]认为发生完全层间滑移的水 力裂缝可以在水平截面上应用(广义)平面应变假 设,因此可以将拟三维模型模拟输出的压降曲线作 为本模型的输入参数。以缝口净压力为参考压力, 裂缝半长为参考长度,可以由拟三维模型得到一组 无因次净压力与无因次距离的关系^[19-20](当然这组 关系并不是唯一确定的,这里只是作为后续模拟的 输入参数使用),如图 3 所示。对曲线进行如图所 示的处理,将光滑的净压力曲线离散为一系列不连 续的矩形均匀应力(红色方框)。再将图 3 中各参 数映射到图 2 的实际尺寸下,并带入到式(2)~(4) 进行叠加处理,即可得到图 4。

比较图 2(b)和图 4 可知,当考虑水力裂缝内的 流动压降时,诱导应力的压应力区和拉应力区都显 著减小(拉正压负)。对于缝间应力干扰研究,如果 考虑了缝内压降,转向区域会明显减小,在远井位置 形成裂缝网络的可能性会大幅度降低;而对于起裂 压力的计算,考虑缝内流体压降会使周围其他点的



图 2 不同缝内均匀压力作用下的诱导应力分布

Fig. 2 Induced stress distribution under different local uniform inner pressure



起裂附加应力减小,经典模型对于起裂附加应力的 计算过于保守。



stress distribution

从图 5 差值图版可以看出,与无压降模型相比, 考虑缝内压降对诱导应力分布的影响主要集中在裂 缝尖端。因此,实际水力压裂施工中,天然裂缝的稳 定性大大高于文献[4]的估计;在分析天然裂缝的 稳定性时,应该考虑采用本文中推荐的诱导应力计 算公式。





4 非对称延伸对诱导应力的影响

常规压裂施工中经常会出现裂缝两翼长短不一的情况。在缝高扩展分析时,一般也认为上缝高会

略大于下缝高。因此,不论将平面应变假设应用在 缝长方向还是缝高方向都会面临非对称延伸的问题。经典模型只能考虑缝内压力均匀分布的边界条件,不能模拟裂缝非对称延伸的影响。建立的考虑 任意压力分布的模型则可以通过对边界条件的调整 模拟非对称延伸对裂缝诱导应力分布的影响。

图 6 给出了上下半缝高(左右半缝长)分别为 14 和 6 m 的诱导应力分布云图。其中 x 轴上的-4 m 处为注液的入口,因此为最高压应力区。从裂缝 诱导应力的整体分布看,压应力区在靠近裂缝的位 置不对称分布,短半缝周围形成缝网的可能性更大; 但在远离裂缝的位置(距离裂缝二分之一半缝长以 外),压应力区逐渐转变为对称分布,由于平均压力 的下降,远离裂缝区域的应力绝对值远小于图 2(b) 中的对应位置。长半缝的拉应力区明显大于短半 缝,更容易导致周围的天然裂缝剪切滑移,这一区域 会给微地震的检波器传递更多的破裂信号^[21]。



on fracture induced stress

5 周期内压力对诱导应力的影响

裂缝延伸过程中由于地应力和渗透率随地层沉 积韵律的变化,经常会导致缝内净压力呈现不规则 的分布。为了研究缝内净压力波动对诱导应力分布 的影响,采用本文中模型模拟缝内净压力呈周期性 变化时裂缝周围应力分布。

图 7 为缝内压力存在周期性变化但平均压力与 图 2(b)相等时的裂缝诱导应力模拟结果。从图 7 可以看出,周期性的压力波动仅对距离裂缝壁面五 分之一半缝长以内区域的应力分布具有一定影响, 远离裂缝区域的应力与图 2(b)基本一致。说明当 平均压力相等时,内压力波动对应力分布影响不大, 在常规计算中,计算远离裂缝区域的应力时可以将 平均压力直接带入经典公式计算。



6 结 论

(1)使用复变函数方法建立了局部受均匀压力 作用下的裂缝诱导应力模型,并以该模型作为基本 单元,借鉴数值积分思路,叠加得到了可以计算任意 内压力作用下裂缝诱导应力分布的计算模型。

(2)验证了模型的精度,认为经典的裂缝诱导 应力计算模型仅是局部受均匀内压力模型的特解。

(3)与恒定内压相比,考虑缝内压降对诱导应 力分布的影响主要体现在裂缝尖端,该影响会导致 远井位置形成缝网的可能性大幅度下降、天然裂缝 的稳定性显著提高。

(4)不对称延伸会对诱导应力分布产生显著影响,裂缝附近(二分之一半缝长以内)的高压应力区 会向短半缝偏移,但远离裂缝的应力分布依然关于 裂缝中垂线对称。

(5)地应力变化引起的净压力周期性波动不会 对诱导应力产生较大影响。

参考文献:

 [1] 郭建春,尹建,赵志红.裂缝干扰下页岩储层压裂形成 复杂裂缝可行性[J].岩石力学与工程学报,2014,33
 (8):1589-1596.

GUO Jianchun, YIN Jian, ZHAO Zhihong. Feasibility of

formation of complex fractures undercracks interference in shale reservoir fracturing [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014,33(8):1589-1596.

- [2] 尹建,郭建春,邓燕. 裂缝干扰下水平井破裂点影响因素分析[J]. 石油钻采工艺,2015,37(2):88-93.
 YIN Jian, GUO Jianchun, DENG Yan. Analysis of influencing factors for breakdown point in horizontal wells under fracture interference [J]. Oil Drilling & Production Technology, 2015,37(2):88-93.
- [3] 刘雨,艾池. 多级压裂诱导应力作用下天然裂缝开启规律研究[J]. 石油钻探技术,2015,43(1):20-26.
 LIU Yu, AI Chi. Opening of natural fractures under induced stress in multi-stage fracturing [J]. Petroleum Drilling Techniques, 2015,43(1):20-26.
- [4] 赵金洲,杨海,李勇明,等.水力裂缝逼近时天然裂缝
 稳定性分析[J].天然气地球科学,2014,25(3):402-408.

ZHAO Jinzhou, YANG Hai, LI Yongming, et al. Stability of the natural fracture when thehydraulic fracture is approaching[J]. Natural Gas Geoscience, 2014, 25(3): 402-408.

- [5] GAO Qian, CHENG Yueming, FATHI E, et al. Analysis of stress-field variations expected on subsurface faults and discontinuities in the vicinity of hydraulic fracturing [J]. SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 2015, 19(1): 54-69.
- [6] ATKINSON C, EFTAXIOPOULOS D A. Numerical and analytical solutions for the problem of hydraulic fracturing from a cased and cemented wellbore [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39 (6): 1621-1650.
- [7] TAGHICHIAN A, ZAMAN M, DEVEGOWDA D. Stress shadow size and aperture of hydraulic fractures in unconventional shales [J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2014,124:209-221.
- [8] CHENG Wan, JIN Yan, CHEN Mian. Reactivation mechanism of natural fractures by hydraulic fracturing in naturally fractured shale reservoirs [J]. Journal of Natural Gas Science and Engineering, 2015,27:1357-1365.
- [9] BUNGER A P, ZHANG X, JEFFREY R G. Parameters affecting the interaction among closely spaced hydraulic fractures[J]. SPE Journal, 2012,17(1):292-306.
- [10] DAHI T A, OLSON J E. How natural fractures could affect hydraulic-fracture geometry [J]. SPE Journal, 2014,19(1):161-171.
- [11] 赵建生. 断裂力学及断裂物理[M]. 武汉: 华中科技 大学出版社, 2003.
- [12] RUDIN W. Real and complex analysis[M]. New York:

McGraw-Hill Education, 1987.

- [13] TADA H, PARIS P C, IRWIN G R. The stress analysis of crack handbook [M]. New York: ASME Press, 2000.
- [14] SADD M H. Elasticity: theory, applications, and numerics[M]. Salt Lake City, Utah: Academic Press, 2014.
- [15] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. Table of integrals, series, and products[M]. New York: Elsevier, 2014.
- [16] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [17] 赵磊.重复压裂技术[M].东营:中国石油大学出版 社,2008.
- [18] ECONOMIDES M J, NOLTE K G. Reservoir stimulation
 [M]. Chichester: Wiley, 2000.
- [19] 彭瑀.酸压控缝高新工艺及模型研究[D].成都:西南石油大学,2014.

PENG Yu. A new technology and model of acid fracturing fracture height control [D]. Chengdu: Southwest Petroleum University, 2014.

- [20] 赵金洲,彭瑀,李勇明,等.考虑垂向摩阻的裂缝拟三 维延伸模型[J].中国石油大学学报(自然科学版), 2016,40(1):69-78.
 ZHAO Jinzhou, PENG Yu, LI Yongming, et al. A pseudo 3D fracture propagation model with considerationof vertical flow resistance[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2016,40(1):69-78.
 - [21] 侯冰,陈勉,谭鹏,等.页岩气藏缝网压裂物理模拟的 声发射监测初探[J].中国石油大学学报(自然科学 版),2015,39(1):66-71.

HOU Bing, CHEN Mian, TAN Peng, et al. Monitoring of hydraulic fracture network by acoustic emission method in simulated tri-axial fracturing system of shale gas reservoirs[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2015,39(1):66-71.

(编辑 李志芬)