

有限元与离散元混合法在裂纹扩展中的应用

孙翔,刘传奇,薛世峰

(中国石油大学 储运与建筑工程学院,山东 青岛 266580)

摘要:基于有限元与离散元混合方法研究裂纹扩展模拟问题。对含原生裂纹的结构进行单元离散,用有限元计算单元内部,采用离散元计算单元界面,通过单元连接形式的转变实现连续到非连续的转化;采用平面半弹簧法进行接触判断,通过显示迭代求解运动方程,不断更新单元坐标,实现裂纹扩展的数值模拟。以单裂纹与雁形裂纹在单向位移载荷作用下的扩展为例,对比数值结果与试验结果。结果表明:采用有限元与离散元混合方法可有效模拟单、多裂纹的扩展过程;岩桥为 90° 的雁形裂纹受对向挤压载荷作用发生翼裂-翼裂贯通。

关键词:有限单元法;离散单元法;裂纹扩展;数值模拟

中图分类号:TU 45 **文献标志码:**A

Application of combined finite-discrete element method for crack propagation

SUN Xiang, LIU Chuan-qi, XUE Shi-feng

(College of Pipeline and Civil Engineering in China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

Abstract: The process of crack growth was simulated based on the combined finite-discrete element method. The media existing primary cracks was divided by elements. The unit and unit interface were calculated using the finite element and discrete element method, respectively. The continuum was converted into discontinuum by transformation of connection types between elements. The contacts were detected using the half-spring method in plane. The motion equation was solved in an explicit iterative scheme. Updating the coordinates of elements, the process of crack propagation was simulated. The simulation results of a single crack and en echelon cracks under uniaxial compression were contrasted with experimental results. The results show that the process of crack propagation can be effectively simulated using the combined finite-discrete element method. The en echelon cracks with 90° rock bridge under uniaxial compression were linked by wing cracks.

Key words: finite element method; discrete element method; crack propagation; numerical simulation

扩展过程的本质是连续面到非连续面的转化,如何对不连续界面准确刻画是问题的关键。近几十年,裂纹扩展研究发展迅速^[1-2]。经典有限单元法通过尖端设置奇异单元,可用来模拟裂纹扩展。困难在于裂纹扩展后须进行网格重构^[3]。无网格方法可高精度地模拟裂纹扩展,但边界条件以及数值积分难以确定^[4]。黏聚力模型通过设置界面单元可实现结构的断裂,但须预先估计扩展路径^[5]。扩展有限元与广义有限元是基于单位分解框架的单位分解法,难点在于确定复杂裂纹的附加函数,由于没有

接触算法,亦无法考虑开裂纹的闭合影响^[6]。离散单元法作为一种非连续方法,在岩土工程领域得到广泛应用^[7]。离散单元法中求解单元内部变形常采用高斯定理和 Wilkins 的大变形有限差分法^[8]。近年来,由 Munjiza^[9]提出的离散元与有限元混合方法发展迅速,李世海等^[10]提出基于连续介质离散元法,其本质亦为有限元与离散元的混合方法。现有文献中尚未有人将离散元与有限元混合方法应用于裂纹扩展的数值模拟中。笔者编制二维程序,模拟单裂纹、多裂纹在压剪作用下的扩展情况,通过与试验结果的

对比,验证此方法模拟裂纹扩展时的有效性。

1 基本原理

采用有限元与离散元混合方法模拟裂纹扩展的基本过程可概括为:采用网格剖分对含原生裂纹的结构进行单元离散,采用有限元计算单元内部,采用离散元计算单元边界,以修正的 Mohr-Coulomb 准则作为断裂判据,通过弹簧连结的断裂产生单元分离,采用半弹簧法进行接触处理,通过显示迭代求解运动方程,不断更新单元坐标,实现裂纹扩展的数值模拟。

1.1 基本方程

选用三角形常应变单元,单元与单元之间通过法向与切向弹簧相联(图 1),计算过程须满足运动方程与本构方程。其中,运动方程为核心方程,在单元内部满足本构方程,弹簧仅作为数学处理,通过增大其刚度以保证结构变形主要发生在单元内部,而非单元界面上,采用类似于有限元法处理接触问题时的罚函数法。

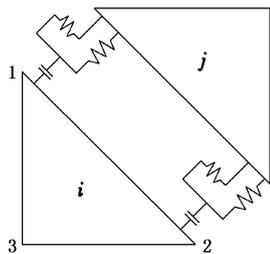


图 1 单元间联接关系

Fig. 1 Connections between elements

图 1 中, i 单元 1 号节点的运动方程为

$$m_{i1}\ddot{u} = F_d + F_j + F_c + F_e \quad (1)$$

式中, m_{i1} 为 i 单元 1 号节点的集中质量(在三角形常应变单元中, $m_{i1} = \rho A/3$); ρ 为材料密度; A 为单元面积; F_d 为单元变形力; F_j 为界面作用力; F_c 为阻尼力; F_e 为外力。

(1) 单元内部。单元为弹性,采用有限元计算变形力,由于显式求解,无须形成总刚,仅需单元刚度,便可由节点位移求得节点力。基本思路如下:

由最小势能原理可推得单元的刚度矩阵为

$$[K^{(e)}] = \iint_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV \quad (2)$$

式中, $[B]$ 为几何矩阵; $[D]$ 为弹性矩阵。

当单元节点位移已知时,由

$$[K^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \{P^{(e)}\} \quad (3)$$

可求得节点力,即为单元变形力。单元内部应变、应

力可分别求得为

$$\{\varepsilon\} = [B] \{u^{(e)}\}, \quad (4)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}. \quad (5)$$

(2) 界面作用。将单元界面的相互作用分为连接型和接触型,单元界面作用力即可分为弹簧作用力与单元接触力。单元破坏之前均为连接型,提供弹簧作用力,此时有

$$\begin{cases} F_n^j = -K_n^j \Delta d_n^j, \\ F_s^j = -K_s^j \Delta d_s^j. \end{cases} \quad (6)$$

式中, F 为弹簧作用力; K 为弹簧刚度; Δd 为弹簧位移;上标 j 表示第 j 根弹簧,下标 n, s 分别表示法向与切向。

进行破坏计算时,采用带拉伸破坏的修正 Mohr-Coulomb 准则^[11] 对弹簧力进行修正。

$$\begin{cases} F_n^j = 0, F_s^j = 0, F_n^j > T; \\ \tan \varphi + C, F_s^j = F_n^j \tan \varphi, F_s^j > F_n^j. \end{cases} \quad (7)$$

式中, T 为抗拉强度; φ 为内摩擦角; C 为黏聚力。

弹簧无论发生何种模式的断裂,连接型均变为接触型,此时界面力为接触力。单元不发生接触时,相互作用力为零,单元相互挤压时,作用力如下:

$$\begin{cases} F_n^j = -K_n^j \Delta d_n^j, \Delta d_n^j < 0; \\ F_s^j = F_n^j \tan \varphi. \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\Delta d_n^j < 0$ 表示单元相互挤压。

设定弹簧有两个作用:① 求解连续过程中起到连接单元的作用;② 通过弹簧的断裂产生破坏,起到黏聚力模型^[5] 中界面单元的作用。

(3) 阻尼力与外力。阻尼采用局部无黏性阻尼^[12],节点上的阻尼力与非平衡力成比例,阻尼力方向确保能量总是能够消散,阻尼力表示为

$$F_d = \alpha \left| \sum F_i^{(t)} \right| \operatorname{sgn} \left(\dot{u}_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})} \right). \quad (9)$$

式中, α 为常数(取为 0.8); $\sum F_i^{(t)}$ 表示 t 时刻作用于节点上的合力; $\dot{u}_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})}$ 为 $t - \Delta t/2$ 时刻的速度; Δt 为时间步长。

1.2 求解方法

运动方程的求解分为显式解法和隐式解法,采用动态松弛方法求解。动态松弛法是将线性或非线性静力问题转化为动力问题,通过设置阻尼消耗能量,最终使位移收敛到平衡位置(即势能最小位置)的显式求解方法^[13]。

设时间步长为 Δt ,采用中心差分格式,节点速度与节点新坐标为

$$\dot{u}_i^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \dot{u}_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})} + \ddot{u}_i^{(t)} \Delta t, \quad (10)$$

$$x_i^{(t+\Delta t)} = x_i^{(t)} + u_i^{(t+\Delta t/2)} \Delta t \quad (11)$$

在每个计算时步后,需更新节点坐标。整个计算流程如图2所示。

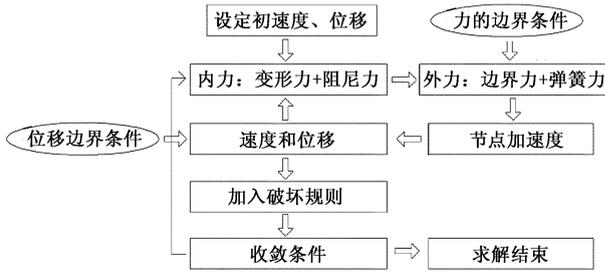


图2 计算流程

Fig. 2 Flow chart of calculation process

2 关键问题的处理

按照 Cundall 的理论^[14],离散元程序必须能够自动识别接触,接触处理是离散元程序中最重要的一部分。此外,选择时步和加速计算等问题是编程的关键。

2.1 接触判断

目前,离散元程序对接触的判断普遍采用公共面法(common plane method),但此方法需进行接触类型(点-点,点-线,线-线)的判断。将半弹簧法^[15]简化至二维情况,以此进行接触判断。如图3所示,将判断单元的各边顶点向中心缩进小段距离(如5%),生成半弹簧,当半弹簧与目标单元的距离在一定范围内时,生成接触。同样过程应用到各单元中,通过对若干特殊情况的处理(如半弹簧生成点又是目标单元的插值点时须进行接触力减半处理),接触力可直接根据半弹簧与目标面间的相对位移确定,而无须了解母块体与子块体间的具体接触类型。

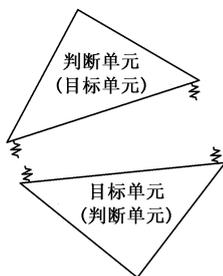


图3 接触判断模型

Fig. 3 Contact judgement model

2.2 时步选择

离散元的求解是条件稳定的,时间步长的选择应以计算收敛为前提,提高收敛速度为目的。时间步长的设定须满足单元内部计算与单元间相对位移的计算均收敛。本例参照离散元软件 UDEC,设定

步长。

单元内部计算收敛的时间步长为

$$\Delta t_n < 2\sqrt{m_i/k_i} \quad (12)$$

式中, m_i 为单元节点*i*的集中质量; k_i 为节点周围的弹簧刚度。

单元间相对位移计算收敛确定的时间步长为

$$\Delta t_b < 2f_{rac}\sqrt{M_{min}/K_{max}} \quad (13)$$

式中, M_{min} 为最小单元质量; K_{max} 为最大接触刚度; f_{rac} 为修正系数,通常取为0.1。

时间步长设定为

$$\Delta t = \min(\Delta t_n, \Delta t_b) \quad (14)$$

2.3 加速处理

程序设计中,很大部分机时消耗在判断接触上。接触检测算法^[9]主要有:基于二叉树结构的接触检测算法;直接映射算法;筛选接触检测算法;排序算法以及 Munjiza 提出的非二叉搜索算法。

针对裂纹扩展模拟中,单元并不完全分离这一特点,仅须将各单元共节点的单元设定为其潜在接触单元,若研究开裂受压破坏过程,还须将含裂纹壁的所有单元互相定义为潜在接触单元。此外,仅当弹簧发生断裂时,在断裂弹簧两节点相应位置,生成半弹簧,而其余弹簧仍为连接型。采用上述加速处理,计算受压条件下,10 000个单元的结构破坏,使用 Pentium E5800 处理器,仅须计算 30 min。

3 裂纹扩展模拟

分别对初始裂纹为倾角为45°的单裂纹以及岩桥为90°的雁形裂纹在单向位移载荷作用下,裂纹的扩展过程进行模拟。

3.1 单裂纹扩展模拟

图4为计算模型示意图(单位:cm),位移载荷按0.001 cm/s施加。

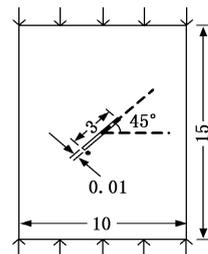


图4 单裂纹计算模型

Fig. 4 Single crack computation model

岩体弹性模量 E 为 20 GPa;摩擦系数 μ 为 0.2;材料的内聚力 C 为 100 kPa;材料抗拉强度 T 为 20 kPa。弹簧刚度 K_n, K_s 均为 100 GN/m。

若界面单元的刚度过小,则材料表现软弱;若界面刚度充分大,但会显著减小显式计算的稳定时间步长,降低计算效率^[16],通过试算,将弹簧刚度设为岩石弹性模量的 50 倍,以减小弹簧带来的误差。

模拟结果显示,计算前 2000 步,裂纹并未发生扩展,仅产生了较明显的应力集中,原生裂纹宽度有所减小,但未发生裂纹壁的接触。继续加载,当计算到 4000 步时,可较清楚地观察到由于拉伸破坏产生的翼型裂纹,裂纹进入曲线扩展过程,次生裂纹不断向最大主应力方向趋近。在裂纹宽度方面,越靠近原生裂纹尖端,扩展裂纹的宽度越大。图 5 为不同时步下的结构水平向位移云图,图 6 为数值模拟结果与试验结果^[17]的对比。可以看出,采用有限元与离散法混合方法模拟裂纹扩展是十分有效的。

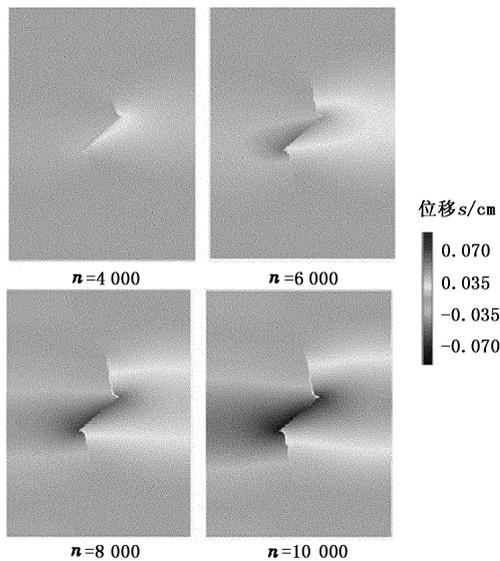


图 5 单裂纹扩展水平位移

Fig. 5 Horizontal displacements of single crack propagation

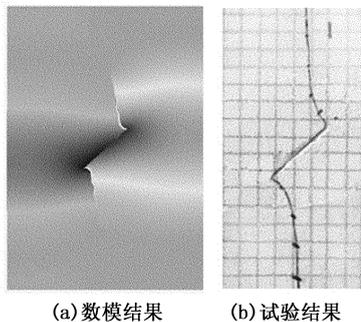


图 6 数模与试验结果对比

Fig. 6 Contrast of simulation and experiment results

3.2 多裂纹扩展模拟

研究岩桥倾角为 90° 的双裂纹在按 0.001 cm/s 施加的对向挤压位移载荷作用下的裂纹扩展情况。

图 7 为结构尺寸(单位:cm),且将内端定义为岩桥所在区域,外端定义为另外两个裂纹尖端影响区域。

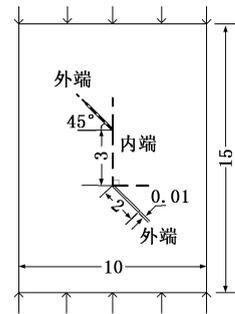


图 7 多裂纹计算模型

Fig. 7 Multi-crack computation model

类似于单一裂纹,两裂纹尖端起初均发生较明显的应力集中,随着载荷的继续施加,首先出现 I 型翼型裂纹,当计算 6000 ~ 8000 步时,内端次生裂纹迅速发展以致贯穿,外端次生裂纹发育相对缓慢,均发生拉伸破坏。图 8 为不同时步下,多裂纹扩展水平位移云图。可以看出,贯穿路径并非一条连续曲线,而是在裂纹尖端发生复杂破坏,产生多条细小的次生裂纹,因而采用以往路径假定的方式处理裂纹扩展有本质的缺陷。

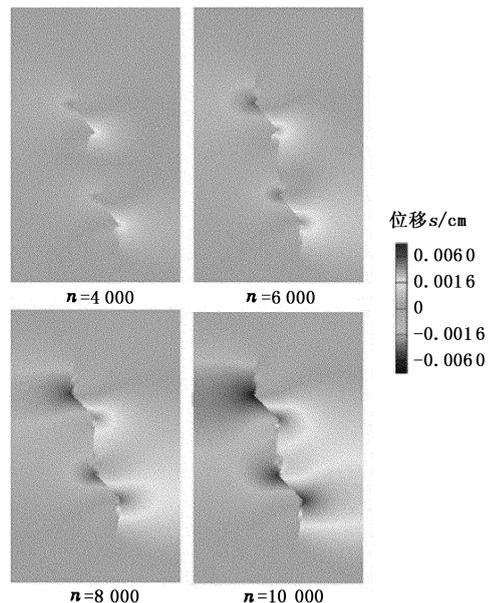


图 8 多裂纹扩展水平位移

Fig. 8 Horizontal displacements of multi-crack propagation

试验研究^[18]表明,岩桥为 90° 时的扩展过程为:预制裂隙尖端产生翼形裂纹,翼形裂纹转折向最大压应力方向稳定扩展,与另一条预制原生裂纹的翼裂纹发生相互连接(翼裂—翼裂贯通),最后形成贯通性的宏观破裂带。此描述与数模过程相匹配。图

9 为最终数模结果与试验结果对比。由图 9 可以看出采用有限元与离散法混合方法模拟多裂纹扩展是可行的。

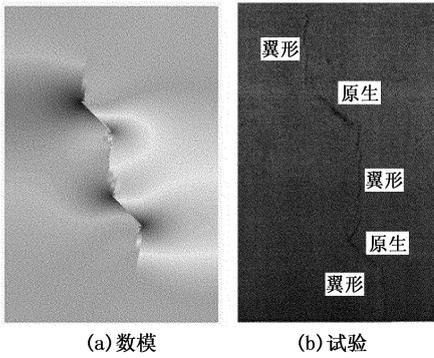


图 9 数模与试验结果对比

Fig. 9 Contrast of simulation and experiment results

4 结 论

(1) 岩桥为 90° 的雁行裂纹受对向挤压位移载荷作用发生翼裂—翼裂贯通。

(2) 采用有限元与离散法混合方法可有效模拟岩土材料下单、多裂纹的扩展过程。有限元与离散法混合方法模拟裂纹扩展具有模拟范围广, 计算迅速, 无须重构网格, 同步计算裂纹宽度等优点。

参考文献:

[1] 赵益忠, 曲连忠, 王幸尊, 等. 不同岩性地层水力压裂裂缝扩展规律的模拟试验[J]. 中国石油大学学报: 自然科学版, 2007, 31(3): 63-66.
ZHAO Yi-zhong, QU Lian-zhong, WANG Xing-zun, et al. Simulation experiment on prolongation law of hydraulic fracture for different lithologic formations[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2007, 31(3): 63-66.

[2] 李玮, 闫铁, 毕雪亮. 基于分形方法的水力压裂裂缝起裂扩展机理[J]. 中国石油大学学报: 自然科学版, 2008, 32(5): 87-91.
LI Wei, YAN Tie, BI Xue-liang. Mechanism of hydraulically created fracture breakdown and propagation based on fractal method[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2008, 32(5): 87-91.

[3] BOUCHARD P O, BAY F, CHASTEL Y. Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(35): 3887-3908.

[4] BELYTSCCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229-256.

[5] RENÉ de Borst. Numerical aspects of cohesive-zone models[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2003, 70(14): 1743-1757.

[6] DUARTE C A, HAMZEH O N, LISZKA T J, et al. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(15): 2227-2262.

[7] MISHRA B K, RAJ K Rajamani. The discrete element method for the simulation of ball mills [J]. Applied Mathematical Modelling, 1992, 16(11): 598-604.

[8] LANRU Jing, STAPHANSSON Ove. Fundamentals of discrete element methods for rock engineering [M]. Elsevier, 2007.

[9] MUNJIZA Ante. The combined finite-discrete element method[M]. Queen Mary, London: University of London, 2004.

[10] LI Shi-hai, LIU Xiao-yu, LIU Tian-ping, et al. Continuum-based discrete element method and its applications: UK-China Summer School/International Symposium on DEM[C]. Beijing: c2008.

[11] BRADY B H G, BROWN E T. Rock mechanics for underground mining [M]. 2nd ed. London: Chapman & Hall, 1993: 106-108.

[12] CUNDALL P A, BROWN E T. Distinct element models of soil and rock structure[J]. Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics, 1987, 4: 129-163.

[13] TONG P. An adaptive dynamic relaxation method for static problems[J]. Computational Mechanics, 1986, 1, 127-140.

[14] CUNDALL P A, HART R D. Numerical modelling of discontinua [J]. Engineering Computations, 1992, 9(2): 101-113.

[15] 冯春, 李世海, 刘晓宇. 半弹簧接触模型及其在边坡破坏计算中的应用[J]. 力学学报, 2011, 43(1): 184-192.
FENG Chun, LI Shi-hai, LIU Xiao-yu. Semi-spring contact model and its application to failure simulation of slope[J]. Acta Mechanica Sinica, 2011, 43(1): 184-192.