

利用非线性最优化方法构建近似常 Q 黏弹模型

郭振波¹, 田 坤¹, 李振春¹, 曹晓莉¹, 李爱君², 王 谦³

(1. 中国石油大学地球科学与技术学院, 山东青岛 266580; 2. 中国石化胜利油田胜利采油厂胜采一矿, 山东东营 257000;
3. 中国石油集团测井有限公司, 陕西西安 710077)

摘要:目前通常采用的黏弹模型在描述介质品质因子对频率的依赖关系方面存在不足。基于广义标准线性固体, 利用黏声或黏弹介质的品质因子公式建立超定非线性方程组, 采用属于非线性最优化方法的 Levenberg-Marquardt 算法求解方程组来拟合近似常 Q 模型, 并模拟二维均匀模型的地震响应, 简要考察黏弹性的影响。该方法不用任何近似或假设, 所得结果更精确, 而且可以求解病态问题。拟合及模拟结果表明: Levenberg-Marquardt 方法可以较精确地构建近似常 Q 模型, 采用两个组元就已足够; 黏弹性对地震波的振幅和频谱有显著影响, 实际应用中应当考虑。

关键词:地震波; 黏弹性介质; 品质因子; 常 Q 模型; 非线性最优化方法; 正演模拟

中图分类号: P 631

文献标志码: A

Constructing nearly constant- Q viscoelastic model using the nonlinear optimization method

GUO Zhen-bo¹, TIAN Kun¹, LI Zhen-chun¹, CAO Xiao-li¹, LI Ai-jun², WANG Qian³

(1. School of Geosciences in China University of Petroleum, Qingdao 266580, China;

2. Shengli Oil Production Plant, Shengli Oilfield Company, SINOPEC, Dongying 257000, China;

3. China Petroleum Logging Company Limited, Xi'an 710077, China)

Abstract: Current viscoelastic models have shortage in describing the relation between quality factor Q and frequency. Based on the generalized standard linear body, over-determined system of nonlinear equations was established using the Q formula of viscoacoustic/viscoelastic media and the Levenberg-Marquardt algorithm. The Levenberg-Marquardt algorithm being a nonlinear optimization method was adopted to directly compute the relaxation time to fit the nearly constant Q model. The seismic response of 2D homogeneous model was computed to investigate the effect of viscoelasticity briefly. This method does not involve any approximations or assumptions, so the results are more accurate. The ill-posed problems can also be solved by this method. The fitting and simulation results show that Levenberg-Marquardt algorithm can construct nearly constant Q model more accurately with only two elements. Viscoelasticity has a remarkable effect on the amplitude and frequency spectrum of seismic wave, and should be considered in practical applications.

Key words: seismic waves; viscoelastic media; quality factor; constant Q model; nonlinear optimization method; forward modeling

实际地球介质更接近黏弹性介质, 关于地震波在非完全弹性介质中的传播问题的研究起步较早。自从 Day 等用 n 阶有理函数近似黏弹模量并通过 Pade 近似方法计算系数进行黏弹波数值模拟以来^[1], 很多基于流变学模型^[2-3]针对速度-应力公式

的方法技术也被发展起来。但是以往的方法或模型在描述品质因子对频率的依赖关系方面都存在精度或适应性的问题^[4-14], 笔者以广义标准线性固体为基础, 不经过任何近似或假设, 利用黏声或黏弹介质的品质因子公式建立超定非线性方程组, 并直接采

收稿日期: 2013-09-29

基金项目: 国家“973”计划项目(2011CB202402); 国家自然科学基金项目(41274124); 中国石化地球物理重点实验室开放研究基金项目(WTYJY-WX2013-04-11); 中央高校基本科研业务费专项(13CX06014A)

作者简介: 郭振波(1986-), 男, 博士研究生, 主要从事地震正演及全波形反演方面的工作。E-mail: stone_gzb@163.com。

用属于非线性最优化方法的 Levenberg-Marquardt (L-M) 算法求解,从而求得松弛时间,实现近似常 Q 黏弹模型的构建。同时,分析介质的黏弹性对地震波的影响。

1 线性黏弹模型基本理论

根据波尔兹曼叠加原理,线性黏弹性介质的应力应变是卷积关系^[15],即

$$\sigma(t) = \psi(t) * \varepsilon(t) = \dot{\psi}(t) * \varepsilon(t) = M(t) * \varepsilon(t). \quad (1)$$

式中, $\sigma(t)$ 为应力; $\varepsilon(t)$ 为应变; $\psi(t)$ 为松弛函数; $M(t)$ 表示应变为 δ 函数时的应力响应。应变和松弛函数上的点表示时间导数,星号表示卷积。

对式(1)进行傅里叶变换,可以得到频率域的本构关系

$$\sigma(\omega) = M(\omega) \varepsilon(\omega). \quad (2)$$

式中, ω 为频率; $M(\omega)$ 为依赖频率的复黏弹模量。

复黏弹模量描述了全部的黏弹特性,可以以弹性元和牛顿黏滞元为基础,通过器件组合法对黏弹模量进行构建和表示,其中将一系列标准线性固体(或称 zener 体)并联得到的广义标准线性固体(或称广义 zener 体)已经被广泛用来构建近似常 Q 黏弹模型,其松弛函数和黏弹模量分别为

$$\psi(t) = M_R \left[1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{\varepsilon l}}{\tau_{\sigma l}} \right) e^{-t/\tau_{\sigma l}} \right] H(t), \quad (3)$$

$$M(\omega) = \frac{M_R}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1 + i\omega\tau_{\varepsilon l}}{1 + i\omega\tau_{\sigma l}}. \quad (4)$$

式中, M_R 为松弛模量; L 为标准线性固体的个数; $\tau_{\varepsilon l}$ 和 $\tau_{\sigma l}$ 分别为第 l 个标准线性固体的应变松弛时间和应力松弛时间; $H(t)$ 为单位阶跃函数。需要说明的是式(3)和(4)与大部分文献中的不同,这是因为 Liu 等^[16]最先提出将单个标准线性体的应力应变关系推广到广义标准线性固体的时候引入了一个小错误,后来的很多文献在引用的时候重复了这个错误,即使在 Moczo^[3]提出正确的松弛函数和黏弹模量的公式以后仍然没有改正。

品质因子的定义^[17]为

$$Q(\omega) = \frac{\text{Re}(M(\omega))}{\text{Im}(M(\omega))}. \quad (5)$$

因此,广义标准线性固体的品质因子为

$$Q(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^L \frac{1 + \omega^2 \tau_{\varepsilon l} \tau_{\sigma l}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2}}{\sum_{l=1}^L \frac{\omega(\tau_{\varepsilon l} - \tau_{\sigma l})}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^2}}. \quad (6)$$

式(6)描述的 $Q - \omega$ 关系中, L 越大,参与的组件越多, $Q - \omega$ 关系就越复杂,越远离单调的递增或递减趋势,越能真实地描述介质的黏弹性质。

2 黏声介质常 Q 拟合

研究表明,地下岩石的品质因子在地震频带内基本是常数,可以根据这一原则直接利用非线性最优化方法计算松弛时间。主要思想就是根据给定的常数品质因子在指定频带内采样,直接由式(6)建立超定非线性方程组,并采用属于非线性最优化的 L-M 方法求解,从而实现常 Q 拟合。对于黏声介质,品质因子由式(6)表达,方程组可由如下表示:

$$\tilde{Q} = Q(\omega_j), j = 1, \dots, N. \quad (7)$$

式中, $\tilde{Q}$ 为给定的常数品质因子; ω_j 为指定频带内的采样频率; N 为采样数。

方程组(7)可用 L-M 方法求解, L-M 算法是 Gauss-Newton 算法的一个变种,可以求解病态问题。将方程组(7)写成统一的形式 $f(x) = 0$, 并令 $S(x) = \|f(x)\|_2^2$, 则计算流程^[18]如下:

- (1) 选取 $\beta \in (0, 1)$, 初始参数 μ_0 , 增长因子 $v > 1$;
- (2) 给定初始点 x_0 , 置 $k = 0$;
- (3) 计算 $f_k = f(x_k)$, $S_k = S(x_k) = f_k^T f_k$;
- (4) 计算 $A_k = Df(x_k) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right]_{x=x_k}$, $Q_k = A_k^T A_k$;
- (5) 计算 $g_k = A_k^T f_k$;
- (6) 解法方程 $(Q_k + \mu_k I) p_k = -g_k$;
- (7) 计算 $x_{k+1} = x_k + p_k(\mu_k)$, $f_{k+1} = f(x_{k+1})$, $S_{k+1} = f_{k+1}^T f_{k+1}$;
- (8) 检查是否满足精度要求, 若满足, 输出 x_{k+1} ;
- (9) 检验: $S_{k+1} < S_k + \beta g_k^T p_k$, 若是, 令 $\mu_{k+1} = \frac{\mu_k}{v}$, 转步骤(10), 否则, 令 $\mu_{k+1} = v\mu_k$, 转步骤(6);
- (10) 置 $k = k + 1$, 转步骤(3)。

取 $L = 2$, $\tilde{Q} = 20$ 进行试算, 初始值参考文献[2]的参数值并经验调整得到, 初始值、部分中间结果以及最后结果见表1。迭代到16次时结果已达到较高精度, 此后在单精度情况下结果不再变化, 由此结果计算实际品质因子随频率变化曲线, 如图1所示。由图中可以看出, 在目标频带内的品质因子变化范围较小, 进一步可以算出曲线的误差: 最大值约为 21.0589, 最小值约为 19.5939, 均方根误差约为

0.2138, 相对均方根误差约为 1.069%。此外, 还计算了大量不同期望品质因子的例子, 结果与上面类似, 尤其是相对误差数值基本相同。这在标准线性体个数或精度方面与一些文献^[4-8] 中的方法相比具有优势, 而且适用大范围品质因子取值的计算, 通过

经验调整计算时可只使用一组初值。显然地, 若要更精确地求取, 可以有针对性地根据子波频带范围以及能量分布进行计算或者增加标准线性体的个数。增加标准线性体的个数时, 只需简单地扩展即可。

表 1 $L = 2, \tilde{Q} = 20$ 时的算例结果
Table 1 Computed results when $L = 2, \tilde{Q} = 20$

k	τ_{e1}/s	$\tau_{\sigma1}/s$	τ_{e2}/s	$\tau_{\sigma2}/s$	$\frac{\ x_{k+1} - x_k\ }{\ x_k\ }$	$\frac{ S_{k+1} - S_k }{ S_k }$
0	0.03	0.02	0.003	0.002	—	—
1	0.029991344	0.020020319	0.0027054432	0.0023980231	1.3678777×10^{-2}	0.8035646
2	0.029840073	0.020314312	0.0025742075	0.0022415032	1.0723766×10^{-2}	0.1848158
3	0.029008377	0.021857833	0.0018730100	0.0015803791	5.5178214×10^{-2}	0.7811723
4	0.028026044	0.023196075	0.0022257222	0.0018617482	4.7255773×10^{-2}	0.9261125
5	0.027473442	0.022910532	0.0023047605	0.0019257290	1.7269772×10^{-2}	0.1370196
...						...
16	0.014875433	0.012758308	0.0018061292	0.0015306555	1.4067014×10^{-8}	$7.5901301 \times 10^{-15}$

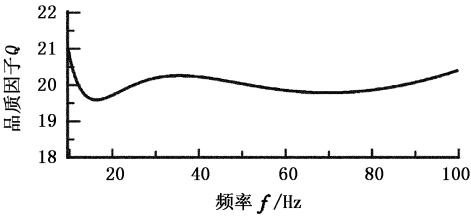


图 1 $L = 2, \tilde{Q} = 20$ 时的常 Q 拟合结果
Fig. 1 Results of constant Q fitting when $L = 2, \tilde{Q} = 20$

3 黏弹介质常 Q 拟合

3.1 品质因子

n 维各向同性黏弹介质的张量应力应变关系^[19] 可以表示为

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{1}{n} [\psi_1(t) - \psi_2(t)] \delta_{ij} * \varepsilon_{kk} + \psi_2(t) * \varepsilon_{ij} \tag{8}$$

式中, σ 为应力; ε 为应变; 下标 i, j, k 取 $1, \dots, n$, n 为空间维数, 下标重复表示叠加; t 为时间; $\psi_1(t)$ 和 $\psi_2(t)$ 为松弛函数; δ_{ij} 为单位冲激函数。将本构关系和运动平衡微分方程结合, 并引入记忆变量, 可以得到黏弹介质的波动方程。

将松弛函数对时间求导并进行傅里叶变换可以得到频率域的复黏弹模量。对于广义标准线性固体, 松弛函数和复模量分别为

$$\psi_v(t) = M_R^{(v)} \left[1 - \frac{1}{L_v} \sum_{l=1}^{L_v} \left(1 - \frac{\tau_{el}^{(v)}}{\tau_{\sigma l}^{(v)}} \right) e^{-t/\tau_{\sigma l}^{(v)}} \right] H(t), \tag{9}$$

$v = 1, 2,$

$$M_v(\omega) = \frac{M_R^{(v)}}{L_v} \sum_{l=1}^{L_v} \frac{1 + i\omega\tau_{el}^{(v)}}{1 + i\omega\tau_{\sigma l}^{(v)}}, \quad v = 1, 2. \tag{10}$$

式中, v 取 1 或 2 分别对应胀缩或剪切运动; $M_R^{(v)}$ 为松弛模量; L_v 为标准线性固体的个数; $\tau_{el}^{(v)}$ 和 $\tau_{\sigma l}^{(v)}$ 为松弛时间; $H(t)$ 为单位阶跃函数; $M_v(\omega)$ 为复黏弹模量, v 取 1 或 2 分别与弹性介质中的体积模量和剪切模量相对应。采用式(8) 表示本构关系时纵横波的品质因子不相互独立, 分别为

$$Q_P(\omega) = \frac{\text{Re}[M_1(\omega) + (n-1)M_2(\omega)]}{\text{Im}[M_1(\omega) + (n-1)M_2(\omega)]} = \tag{11}$$
$$\frac{\frac{M_R^{(1)}}{L_1} \sum_{l=1}^{L_1} \frac{1 + \omega^2 \tau_{el}^{(1)} \tau_{\sigma l}^{(1)}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^{(1)2}} + (n-1) \frac{M_R^{(2)}}{L_2} \sum_{l=1}^{L_2} \frac{1 + \omega^2 \tau_{el}^{(2)} \tau_{\sigma l}^{(2)}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^{(2)2}}}{\frac{M_R^{(1)}}{L_1} \sum_{l=1}^{L_1} \frac{\omega(\tau_{el}^{(1)} - \tau_{\sigma l}^{(1)})}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^{(1)2}} + (n-1) \frac{M_R^{(2)}}{L_2} \sum_{l=1}^{L_2} \frac{\omega(\tau_{el}^{(2)} - \tau_{\sigma l}^{(2)})}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^{(2)2}}},$$

$$Q_S(\omega) = \frac{\text{Re}(M_2(\omega))}{\text{Im}(M_2(\omega))} = \frac{\sum_{l=1}^{L_2} \frac{1 + \omega^2 \tau_{el}^{(2)} \tau_{\sigma l}^{(2)}}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^{(2)2}}}{\sum_{l=1}^{L_2} \frac{\omega(\tau_{el}^{(2)} - \tau_{\sigma l}^{(2)})}{1 + \omega^2 \tau_{\sigma l}^{(2)2}}}. \tag{12}$$

其他文献^[4-8] 一般都是在假设或近似的基础上计算松弛时间, 精度有所限制。这里综合考虑纵横波, 采用与黏声介质相同的思路与方法求取松弛时间, 实现常 Q 拟合。方程组可表示为

$$\begin{cases} \tilde{Q}_P = Q_P(\omega_j), \\ \tilde{Q}_S = Q_S(\omega_j), \quad j = 1, \dots, N. \end{cases} \tag{13}$$

式中, $\tilde{Q}_P$ 、 $\tilde{Q}_S$ 分别为给定的纵横波常数品质因子。

取 $L_1 = L_2 = 2, \tilde{Q}_P = 50, \tilde{Q}_S = 20$ 进行试算, 初始值由黏声情况的结果并经验调整得到, 初始值、部分中间结果以及最后结果见表 2。迭代到第 35 次时达到精度较高的结果, 此时在单精度情况下结果不再

变化。由此结果计算实际品质因子随频率变化曲线,如图 2 所示。由图中可以看出,与黏声情况类似,目标频带内的品质因子也都基本保持不变,进一步可以算出曲线的误差:总体均方根误差约为 0.341 8,纵波品质因子的相对均方根误差约为 0.607 6%,横波品质因子的相对均方根误差约为 1.879 5%。此外继续计算大量不同期望品质因子

表 2 $L_1 = L_2 = 2, \tilde{Q}_p = 50, \tilde{Q}_s = 20$ 时的算例结果

Table 2 Computed results when $L_1 = L_2 = 2, \tilde{Q}_p = 50, \tilde{Q}_s = 20$

k	$\tau_{e1}^{(1)}/s$	$\tau_{o1}^{(1)}/s$	$\tau_{e2}^{(1)}/s$	$\tau_{o2}^{(1)}/s$	$\tau_{e1}^{(2)}/s$	$\tau_{o1}^{(2)}/s$	$\tau_{e2}^{(2)}/s$	$\tau_{o2}^{(2)}/s$	$\frac{\ x_{k+1} - x_k\ }{\ x_k\ }$	$\frac{ S_{k+1} - S_k }{ S_k }$
0	0.02	0.01	0.002	0.001	0.02	0.01	0.002	0.001	—	—
1	0.019969733	0.010112240	0.0013635899	0.0018785350	0.019977191	0.010082735	0.0015518673	0.0016150207	4.1942842×10^{-2}	0.5154811
2	0.019160537	0.012341646	0.0027521329	0.0032603426	0.019459026	0.011514389	0.0017171248	0.0016259371	0.1080079	0.3755962
3	0.018168148	0.014184080	0.0037786451	0.0040724450	0.018684417	0.013216349	0.0016463905	0.0013632695	9.5729426×10^{-2}	0.4682528
4	0.017089058	0.015667256	0.0042316015	0.0042563076	0.017939789	0.014459479	0.0013265735	0.0010426841	7.3606364×10^{-2}	0.8071194
...										
35	0.052427616	0.049336158	0.0024075476	0.0023276922	0.012238998	0.010429387	0.0013575174	0.0011466843	7.5137706×10^{-8}	$6.7521851 \times 10^{-16}$

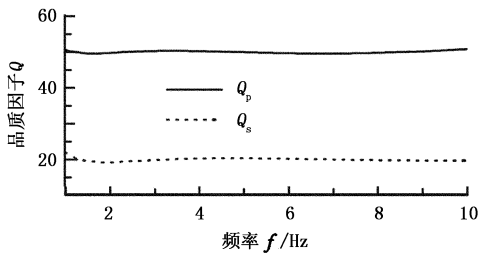


图 2 $L_1 = L_2 = 2, \tilde{Q}_p = 50, \tilde{Q}_s = 20$ 时的常 Q 拟合结果

Fig. 2 Results of constant Q fitting when $L_1 = L_2 = 2, \tilde{Q}_p = 50, \tilde{Q}_s = 20$

3.2 介质的黏弹性对波形和频谱的影响

黏弹性介质中的运动平衡微分方程与弹性介质中相同,再结合应力应变关系,并引入记忆变量消除卷积,可以整理得到二维各向同性黏弹性介质的一阶速度-应力波动方程:

$$\partial_t \rho v_x = \partial_x \sigma_{xx} + \partial_z \sigma_{xz},$$
$$\partial_t \rho v_z = \partial_x \sigma_{xz} + \partial_z \sigma_{zz},$$
$$\partial_t \sigma_{xx} = (\lambda^U + 2\mu^U) \partial_x v_x + \lambda^U \partial_z v_z + (\lambda^R + \mu^R) \sum_{l=1}^{L_1} E_1^l + 2\mu^R \sum_{l=1}^{L_2} E_{11}^l,$$
$$\partial_t \sigma_{zz} = \lambda^U \partial_x v_x + (\lambda^U + 2\mu^U) \partial_z v_z + (\lambda^R + \mu^R) \sum_{l=1}^{L_1} E_1^l - 2\mu^R \sum_{l=1}^{L_2} E_{11}^l,$$
$$\partial_t \sigma_{xz} = \mu^U (\partial_z v_x + \partial_x v_z) + \mu^R \sum_{l=1}^{L_2} E_{12}^l,$$

的例子,结果同样类似。与黏声情况不同的是,由于纵横波品质因子对目标函数的敏感性不同,误差会有所浮动,但是总体保持稳定,不影响整体效果。同样地,若要更精确地求取,可以有针对性地根据子波频带范围以及能量分布进行计算或者增加标准线性体的个数。增加标准线性体的个数时,只是简单地

进行扩展即可。

$$\partial_t E_1^l = -E_1^l / \tau_{o1}^{(1)} + \Theta \phi_{1l},$$
$$\partial_t E_{11}^l = -E_{11}^l / \tau_{o1}^{(2)} + \left(\partial_x v_x - \frac{\Theta}{2} \right) \phi_{2l},$$
$$\partial_t E_{12}^l = -E_{12}^l / \tau_{o1}^{(2)} + (\partial_z v_x + \partial_x v_z) \phi_{2l}.$$

(14)

其中

$$\Theta = \partial_x v_x + \partial_z v_z,$$
$$\lambda^U = (\lambda^R + \mu^R) M^{U1} - \mu^R M^{U2},$$
$$\mu^U = \mu^R M^{U2},$$
$$M^{Uv} = \frac{1}{L_v} \sum_{l=1}^{L_v} \frac{\tau_{el}^{(v)}}{\tau_{ol}^{(v)}}.$$

式中, $\Theta = \partial_x v_x + \partial_z v_z$ 表征胀缩场; λ^R 和 μ^R 是松弛拉梅系数; $\lambda^U = (\lambda^R + \mu^R) M^{U1} - \mu^R M^{U2}$ 和 $\mu^U = \mu^R M^{U2}$ 是未松弛拉梅系数; $M^{Uv} = \frac{1}{L_v} \sum_{l=1}^{L_v} \frac{\tau_{el}^{(v)}}{\tau_{ol}^{(v)}}$, $v = 1, 2$ 为 $t = 0$ 时刻松弛函数与松弛模量的比值; L_1 个记忆变量 E_1^l 对应于描述黏弹胀缩波的 L_1 个标准线性体; L_2 个记忆变量 E_{11}^l, E_{12}^l 对应于描述剪切波的 L_2 个标准线性体; $\phi_{nl} = \left(1 - \frac{\tau_{el}^{(v)}}{\tau_{ol}^{(v)}} \right) / \tau_{ol}^{(v)} / L_v$ 是 $t = 0$ 时刻的松弛函数时间导数的分量与松弛模量的比值。

采用时间二阶空间 $2M$ 阶的交错网格有限差分格式对波动方程离散,如下所示:

$$\rho \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (R_{i+n-1/2,j}^{n+1/2} - R_{i-n+1/2,j}^{n+1/2}) +$$
$$\frac{1}{\Delta z} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (H_{i,j+n-1/2}^{n+1/2} - H_{i,j-n+1/2}^{n+1/2}),$$
$$\rho \frac{W_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - W_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (H_{i+n,j+1/2}^{n+1/2} -$$

$$\begin{aligned}
 & H_{i-n+1,j+1/2}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta z} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (T_{i+1/2,j+n}^{n+1/2} - T_{i+1/2,j-n+1}^{n+1/2}), \\
 & \frac{R_{i+1/2,j}^{n+1} - R_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = (\lambda^U + 2\mu^U) \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (U_{i+n,j}^{n+1/2} - \\
 & U_{i-n+1,j}^{n+1/2}) + \lambda^U \frac{1}{\Delta z} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (W_{i+1/2,j+n-1/2}^{n+1/2} - \\
 & W_{i+1/2,j-n+1/2}^{n+1/2}) (\lambda^R + \mu^R) \sum_{l=1}^{L_1} \frac{(E_{11}^l)_{i+1/2,j}^{n+1} + (E_{11}^l)_{i+1/2,j}^n}{2} + \\
 & 2\mu^R \sum_{l=1}^{L_2} \frac{(E_{11}^l)_{i+1/2,j}^{n+1} + (E_{11}^l)_{i+1/2,j}^n}{2}, \\
 & \frac{T_{i+1/2,j}^{n+1} - T_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = \lambda^U \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (U_{i+n,j}^{n+1/2} - U_{i-n+1,j}^{n+1/2}) + \\
 & (\lambda^U + 2\mu^U) \frac{1}{\Delta z} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (W_{i+1/2,j+n-1/2}^{n+1/2} - W_{i+1/2,j-n+1/2}^{n+1/2}) + \\
 & (\lambda^R + \mu^R) \sum_{l=1}^{L_1} \frac{(E_{11}^l)_{i+1/2,j}^{n+1} + (E_{11}^l)_{i+1/2,j}^n}{2} - \\
 & 2\mu^R \sum_{l=1}^{L_2} \frac{(E_{11}^l)_{i+1/2,j}^{n+1} + (E_{11}^l)_{i+1/2,j}^n}{2}, \\
 & \frac{H_{i,j+1/2}^{n+1} - H_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = \mu^U \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (U_{i,j+n}^{n+1/2} - U_{i,j-n+1}^{n+1/2}) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (W_{i+n-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - W_{i-n+1/2,j+1/2}^{n+1/2}) \right] + \\
 & \mu^R \sum_{l=1}^{L_2} \frac{(E_{12}^l)_{i,j+1/2}^{n+1} + (E_{12}^l)_{i,j+1/2}^n}{2}, \\
 & \frac{(E_{11}^l)_{i+1/2,j}^{n+1} - (E_{11}^l)_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau_{\sigma l}^{(1)}} \times \\
 & \frac{(E_{11}^l)_{i+1/2,j}^{n+1} + (E_{11}^l)_{i+1/2,j}^n}{2} + \phi_{1l} \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (U_{i+n,j}^{n+1/2} - \right. \\
 & \left. U_{i-n+1,j}^{n+1/2}) + \frac{1}{\Delta z} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (W_{i+1/2,j+n-1/2}^{n+1/2} - W_{i+1/2,j-n+1/2}^{n+1/2}) \right] \\
 & \frac{(E_{11}^l)_{i+1/2,j}^{n+1} - (E_{11}^l)_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau_{\sigma l}^{(2)}} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(E_{11}^l)_{i+1/2,j}^{n+1} + (E_{11}^l)_{i+1/2,j}^n}{2} + \frac{1}{2} \phi_{2l} \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (U_{i+n,j}^{n+1/2} - \right. \\
 & \left. U_{i-n+1,j}^{n+1/2}) - \frac{1}{\Delta z} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (W_{i+1/2,j+n-1/2}^{n+1/2} - W_{i+1/2,j-n+1/2}^{n+1/2}) \right], \\
 & \frac{(E_{12}^l)_{i,j+1/2}^{n+1} - (E_{12}^l)_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau_{\sigma l}^{(2)}} \times \\
 & \frac{(E_{12}^l)_{i,j+1/2}^{n+1} + (E_{12}^l)_{i,j+1/2}^n}{2} + \phi_{2l} \left[\frac{1}{\Delta z} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (U_{i,j+n}^{n+1/2} - \right. \\
 & \left. U_{i,j-n+1}^{n+1/2}) + \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^M C_m^{(M)} (W_{i+n-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - W_{i-n+1/2,j+1/2}^{n+1/2}) \right].
 \end{aligned} \tag{15}$$

式中, U, W, R, T, H 分别为 $v_x, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}$ 的离散表示; n 表示时间离散, i, j 分别表示空间横纵坐标离散; Δt 为时间间隔, $\Delta x, \Delta z$ 为空间间隔, $C_m^{(M)}$ 为差分系数。

4 数值算例

考虑二维情况, 设有主频为 35 Hz 的雷克子波, 延迟时间为 $t_0 = 0.04$ s, 加载在 z 方向作为集中力震源, 其波形和频谱如图 3 所示。纵横波松弛速度分别为 1.6 和 1.0 km/s, 密度为 1 000 kg/m³, 纵横波品质因子分别为 50 和 30。利用上述方法计算松弛时间, 并采用交错网格高阶有限差分法进行正演模拟, 取相对震源坐标为 (500 m, 500 m) 的单道波形和频谱并与严格常 Q 模型的解析解^[20] 进行对比, 结果如图 4 和图 5 所示。其中, 图 4(a)、(b) 分别是数值解和常 Q 模型解析解的 x 分量与 z 分量单道波形对比, 图 5 是弹性介质和黏弹性介质的单道 x 分量振幅谱对比, 由于单道相对震源纵横坐标相同, 所以 z 分量振幅谱与 x 分量完全一致, 本文中未列出。

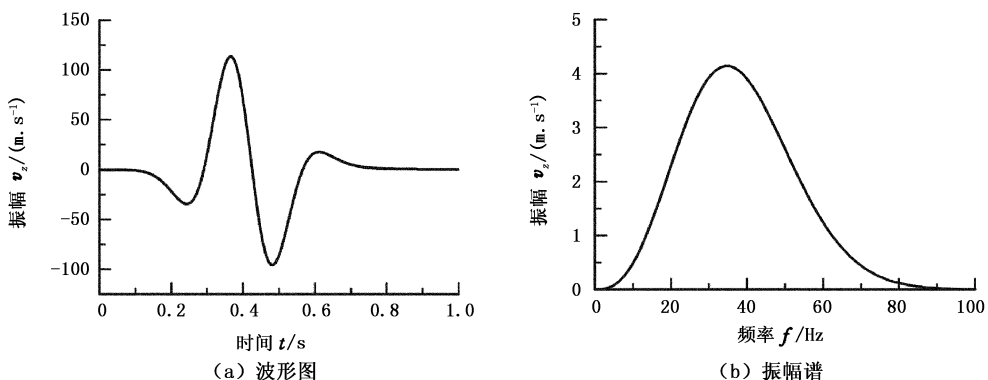


图 3 震源波形和振幅谱

Fig. 3 Waveform and amplitude spectrum of source

由图 4 可以看出,数值解与常 Q 模型的解析解几乎完全一致,说明了本文构建近似常 Q 模型的方法以及正演模拟的准确性和有效性。由图 5 以及图 3(b) 可以看出,弹性介质中纵横波的主频没有变

化,而黏弹性介质中纵横波的主频都会向低频移动,而且与弹性相比能量有所衰减,高频衰减大,低频衰减减小,由于横波品质因子比纵波要小,其衰减的程度比纵波大得多,主频也更靠近低频。

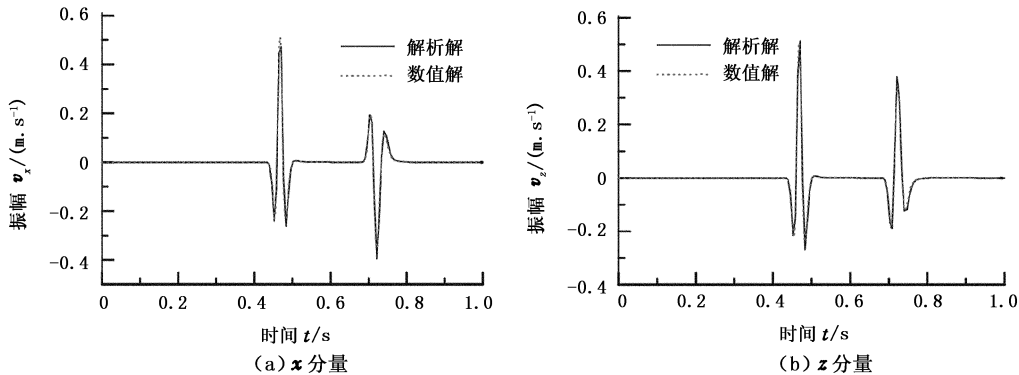


图 4 单道波形与常 Q 模型解析解对比

Fig. 4 Comparison of waveform between numerical solution and analytical solution of constant- Q model

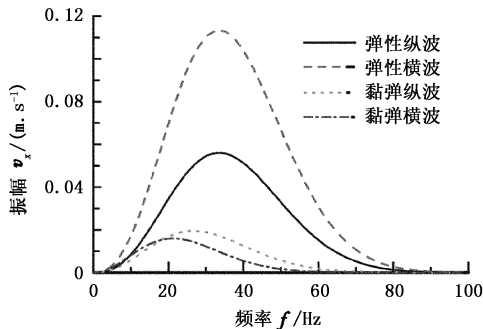


图 5 黏弹与弹性介质单道 x 分量振幅谱对比

Fig. 5 Comparison of amplitude spectrum of x component between elastic and viscoelastic media

5 结束语

从线性黏弹性理论入手,以广义标准线性固体为基础,采用非线性最优化方法求取松弛时间,从而实现近似常 Q 黏弹模型的构建,并对不同的黏声和黏弹模型进行了计算,结果表明:①直接利用属于非线性最优化方法的 L-M 算法计算松弛时间,不经过任何近似或假设,结果更精确;②采用本文方法计算时,采用两个标准线性固体构建的精度已经足够;③黏弹性会对地震波的波形和频谱产生严重影响,进行其他处理时应予以考虑。另外,本文采用的 L-M 算法是局部最优方法,结果依赖于初值,但是经过经验调整,可以实现大范围的品质因子采用一组初值,或者可以将其他方法的结果作为本文方法的初值。

参考文献:

[1] DAY S M, MINSTER J B. Numerical simulation of atten-

uated wavefields using a Padé approximant method [J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1984, 78 (1) : 105-118.

[2] CARCIONE J M, KOSLOFF D, KOSLOFF R. Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium [J]. Geophysical Journal International, 1988, 95: 597-611.

[3] MOCZO P, KRISTEK J. On the rheological models used for time-domain methods of seismic wave propagation [J]. Geophysical Research Letters, 2005, 32: L01306.

[4] EMMERICH H, KORN M. Incorporation of attenuation into time-domain computations of seismic wave fields [J]. Geophysics, 1987, 52 (9) : 1252-1264.

[5] TAL-EZER H, CARCIONE J M, KOSLOFF D. An accurate and efficient scheme for wave propagation in linear viscoelastic media [J]. Geophysics, 1990, 55 (10) : 1366-1379.

[6] BLANCH J O, ROBERTSSON J O A, SYMES W W. Modeling of a constant Q : methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique [J]. Geophysics, 1995, 60 (1) : 176-184.

[7] HESTHOLM S, KETCHAM S, GREENFIELD R, et al. Quick and accurate Q parameterization in viscoelastic wave modeling [J]. Geophysics, 2006, 71 (5) : 147-150.

[8] 孙成禹, 印兴耀. 三参数常 Q 粘弹性模型构造方法研究 [J]. 地震学报, 2007, 29 (4) : 348-357.

SUN Cheng-yu, YIN Xing-yao. Construction of constant- Q viscoelastic model with three parameters [J]. Acta Seismologica Sinica, 2007, 29 (4) : 348-357.

[9] SUN C Y, YIN X Y. An approach of constant- Q viscoelastic model construction and analysis [C]. 77th Annual

- International Meeting, Expanded Abstracts, SEG, 2007: 2125-2129.
- [10] CAO D P, YIN X Y. Q reflections modeling with generalized Maxwell model in time domain[C]. 81th Annual International Meeting, Expanded Abstracts, SEG, 2011:2819-2823.
- [11] ZHANG G W, GAO J H. Applying the τ -method to viscoelastic forward modeling[C]. 83th Annual International Meeting, Expanded Abstracts, SEG, 2013:3531-3536.
- [12] FUTTERMAN W. Dispersive body waves[J]. J Geophys Res, 1962,67(13):5279-5291.
- [13] KJARTANSSON E. Constant Q -wave propagation and attenuation [J]. Journal of Geophysical Research, 1979,84(B9):4737-4748.
- [14] CARCIONE J M. Theory and modeling of constant- Q P- and S-waves using fractional time derivatives[J]. Geophysics, 2009,74(1):T1-T11.
- [15] TIAN K, HUANG J P, LI Z C, et al. Simulation of the planar free surface in the finite-difference modeling of half-space viscoelastic medium[C]. 75th EAGE Conference & Exhibition Incorporating SPE EUROPEC, 2013: Tu-P13-03.
- [16] LIU H D, ANDERSON L, KANAMORI H. Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition[J]. Geophysical Journal International, 1976,47(1):41-58.
- [17] CARCIONE J M, KOSLOFF D, KOSLOFF R. Viscoacoustic wave propagation simulation in the earth[J]. Geophysics, 1988,53(6):769-777.
- [18] 张光澄. 非线性最优化计算方法[M]. 北京:高等教育出版社,2005.
- [19] MARTIN R, KOMATITSCH D. An unsplit convolutional perfectly matched layer technique improved at grazing incidence for the viscoelastic wave equation[J]. Geophysical Journal International, 2009,179:333-344.
- [20] ZHU T Y, CARCIONE J M, HARRIS J M. Approximating constant- Q seismic propagation in the time domain [C]. 82th Annual International Meeting, Expanded Abstracts, SEG,2012:1-5.

(编辑 修荣荣)