

基于第二代小波的杆、梁单元构造研究

王旱祥, 刘延鑫, 丁国栋

(中国石油大学机电工程学院, 山东青岛 266580)

摘要:针对第二代小波尺度函数无显式表达式的缺点,提出采用 PsdVoigt2 函数进行拟合的方法,根据小波有限元及第二代小波理论,利用第二代小波尺度函数取代传统有限元多项式插值函数,通过转换矩阵将小波插值系数转换到物理空间,构造出形函数,并利用该方法构造一系列杆、梁单元。通过不同算例对构造的第二代小波杆、梁单元进行精度验证。计算结果表明,构造的第二代小波单元在求解变形和应变时精度较高,丰富了小波有限元单元库。

关键词:第二代小波;小波有限元;一维单元;单元构造

中图分类号:O 242.21 **文献标志码:**A

引用格式:王旱祥,刘延鑫,丁国栋. 基于第二代小波的杆、梁单元构造研究[J]. 中国石油大学学报:自然科学版, 2014, 38(5):135-141.

WANG Hanxiang, LIU Yanxin, DING Guodong. Study on construction of SGW-based bar-beam elements[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2014, 38(5):135-141.

Study on construction of SGW-based bar-beam elements

WANG Hanxiang, LIU Yanxin, DING Guodong

(College of Mechanical and Electronic Engineering in China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

Abstract: PsdVoigt2 function was used to fit SGW function, and a series of bar beam elements based on the theory of SGW and wavelet finite element were constructed. Traditional finite element polynomial interpolation was replaced by the SGW scaling function, and transformation matrix was utilized to transform wavelet interpolation coefficients to physical space, then the shape function and a series of bar beam elements were constructed. The precision of constructed bar beam elements using SGW scale function as the interpolation function was verified by a series of calculation cases. The calculation results show that the SGW-based element has good precision in calculating the deformation and strain. The SGW-based bar beam element enriches the element library of wavelet-finite element method.

Key words: SGW; wavelet-finite element; one-dimensional element; construction of elements

小波目前主要应用于信号分析、图片处理、故障诊断等许多学科^[1-2]。由于小波具有多尺度、多分辨的特性,被应用于有限元法即小波有限元方法,能够提供多种具有分辨性能的基函数作为有限元插值函数,弥补了传统有限元只以多项式作为插值函数的不足,对于解决传统有限元法难以解决的奇异性等问题具有诱人的前景^[3]。一般的小波有限元方法多采用 Daubechies 小波尺度函数及区间 B 样条小波尺度函数作为插值函数,且多用于平面内梁单元和板单元。Lilliam 等^[4]提出了基于 Daubechies 小波的梁单元,周又和等^[5]利用 Daubechies 小波,从

伽辽金法出发构造了小波梁单元和板单元,何正嘉、马星军等^[6-8]利用区间 B 样条小波构造了小波梁单元和薄板单元。对于第二代小波,何正嘉等^[9]构造了基于第二代小波的细长梁单元,但不能基于该种梁单元进一步构造平面刚架单元和空间梁单元。针对上述问题,笔者基于第二代小波及小波有限元理论构造一系列杆梁单元。

1 第二代小波

第二代小波(SGW 小波),通常可表示为 SGWN, N 为预测系数个数。第二代小波变换不依赖

Fourier 变换,具有算法简单,信号分解运算速度快,占用内存少,可以完全重构,分析任意长度信号的优点。理论上,任何离散小波都可以用提升格式来实现。若已知原始信号 $X=\{x(k),k\in\mathbf{Z}\}$,数据长度为 L ,基于插值细分的第二代小波变换的分解算法为:

(1)剖分。将信号分成奇样本序列 $\lambda_o=\{\lambda_o(k)=x(2k),k\in\mathbf{Z}\}$ 和偶样本序列 $\lambda_e=\{\lambda_e(k)=x(2k+1),k\in\mathbf{Z}\}$ 。

(2)预测。用偶样本 λ_e 预测奇样本,采用相邻的 N 个偶样本($N=2D,D$ 为正整数),预测值误差为细节信号,记为 $\gamma=\{\gamma(k),k\in\mathbf{Z}\}$,即

$$\gamma(k)=\lambda_o(k)-P(\lambda_e),k\in\mathbf{Z}.$$
 (1)

式中, $P(\cdot)$ 为预测函数或预测器,称之为 N 点预测器。

(3)更新。用预测误差修正偶样本,采用相邻的 $\tilde{N}$ 个奇样本($\tilde{N}=2\tilde{D},\tilde{D}$ 为正整数),得到逼近信号。

$$\lambda(k)=\lambda_e(k)+U(\gamma).$$
 (2)

式中, $U(\cdot)$ 为更新函数或更新器,称为 $\tilde{D}$ 点更新器。

如图 1 所示为基于插值细分的第二代小波尺度函数 $\varphi(x)$ 数值计算方法^[10]。设定初始信号 $c=[\cdots,0,0,1,0,0,\cdots]$,细节信号 $d=[\cdots,0,0,0,0,0,\cdots]$ 。

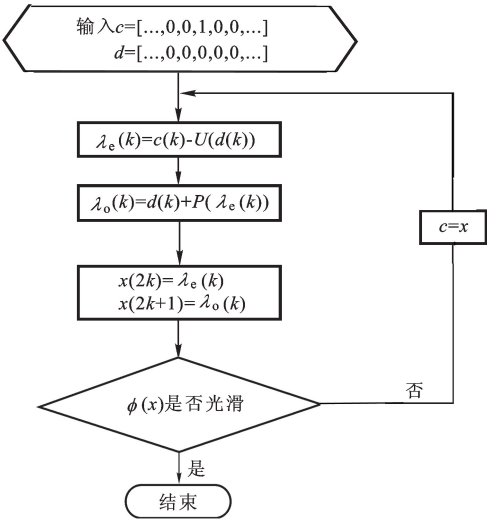


图 1 SGW 尺度函数计算方法

Fig. 1 Calculation method of scaling function SGW

由于 SGW 小波无显示表达式,用于有限元计算时会带来很多问题。为解决该问题,何正嘉等^[9]提出采用三次样条插值方法计算第二代小波尺度函数和小波函数的表达式,但是,采用该方法进行计算时,函数表达式是分段函数,在进行有限元计算时会使计算极为繁琐。经过大量计算,本文中提出采用

Origin 软件中的 PsdVoigt2 函数对其拟合,拟合函数表达式为

$$y=y_0+A\left[m_u\frac{2}{\pi^4}\frac{w_L}{(x-x_c)^2+w_L^2}+(1-m_u)\frac{\sqrt{4\ln 2}}{\sqrt{\pi}w_G}e^{-4\ln 2/w_G^2(x-x_c)^2}\right].$$
 (3)

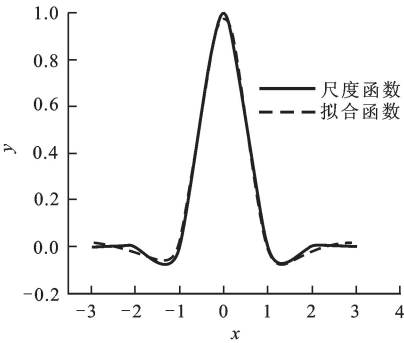
式中, y_0 、 A 、 m_u 、 w_L 、 x_c 、 w_G 为系数。

在构造一维单元时,采用了 SGW4 小波以及 SGW6 小波,其拟合函数系数及拟合图分别如表 1 和图 2 所示,拟合相关系数分别为 0.997 96、0.994 82。

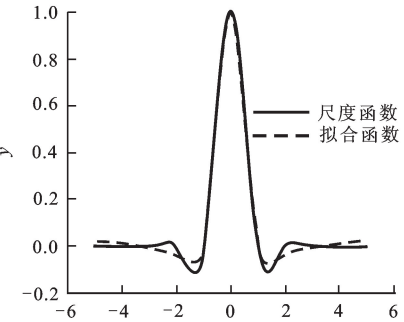
表 1 SGW 小波尺度函数拟合函数系数

Table 1 SGW scaling function and fitting function coefficient

项目	SGW4	SGW6
y_0	0.060 4	0.028 82
x_c	$-1.386\ 67\times 10^{-8}$	$7.543\ 94\times 10^{-9}$
A	0.391 18	0.593 83
w_G	1.156 54	1.119 36
w_L	1.343 52	1.128 62
m_u	-4.491 52	-2.756 04



(a) SGW4 小波



(b) SGW6 小波

图 2 第二代小波尺度函数拟合图

Fig. 2 Fitting figures of SGW scaling functions

2 第二代小波单元构造

2.1 轴力杆与扭转杆单元

用第二代小波尺度函数构造单元,尺度函数支撑区间为 $[-N+1,N-1]$ 。将杆结构离散为有限个单

元,当采用 SGWN 小波构造轴力杆单元时,每个单元被分成 $n=2N-3$ 个部分,其单元节点总数为 $n+1$,节点位移为 $\mathbf{u}^e = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n \quad u_{n+1}]^T$,其划分结构如图 3 所示。

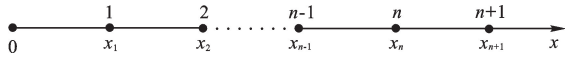


图 3 小波轴力杆单元

Fig. 3 Wavelet axial bar element

引进定义变换公式:

$$\xi = \frac{x-x_1}{l_e} \quad (4)$$

式中, x 为该单元中任意一点的坐标,其取值范围为 $[x_1, x_{n+1}]$; x_1, x_{n+1} 分别为该单元左端点和右端点的位置; l_e 为单元长度; ξ 为任意一点实际坐标的映射值,显然, $\xi \in [0, 1]$ 。

单元内位移函数由尺度函数插值得到,即

$$u = \sum_{i=1}^{2N-2} a_i \varphi(\xi + N - 1 - i) \quad (5)$$

式中, $\varphi(\xi)$ 为第二代小波尺度函数; a_i 为待求系数。

式(5)又可写成矩阵形式:

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{a}^e \quad (6)$$

其中

$$\Phi = [\varphi(\xi+N-1) \quad \varphi(\xi+N-2) \quad \cdots \quad \varphi(\xi+N-1-(2N-2))],$$

$$\mathbf{a}^e = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{2N-3} \quad a_{2N-2}]^T.$$

单元节点位移 $\mathbf{u}^e$ 与小波系数 $\mathbf{a}^e$ 间关系为

$$\mathbf{u}^e = \varphi^e \mathbf{a}^e \quad (7)$$

其中

$$\varphi^e = \left[\Phi(0), \Phi\left(\frac{1}{n}\right), \cdots, \Phi\left(\frac{n-1}{n}\right), \Phi(1) \right]^T.$$

则式(4)可表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e \quad (8)$$

其中, $\mathbf{N}^e = \Phi[\varphi^e]^{-1}$ 。

轴力杆刚度矩阵计算公式^[11]为

$$\mathbf{K}^{e,j} = \int_a^b EA \left(\frac{d\mathbf{N}^e}{dx} \right)^T \left(\frac{d\mathbf{N}^e}{dx} \right) dx = \frac{EA}{l_e} \int_0^1 \left(\frac{d\mathbf{N}^e}{d\xi} \right)^T \left(\frac{d\mathbf{N}^e}{d\xi} \right) d\xi \quad (9)$$

其中

$$l_e = b - a.$$

式中, EA 为抗压刚度; a, b 分别为单元第一个和最后一个节点的坐标; l_e 为单元长度。

同样可得分布载荷列阵

$$\mathbf{P} = l_e \int_0^1 (\mathbf{N}^e)^T f(\xi) d\xi \quad (10)$$

式中, $f(\xi)$ 为分布载荷。

集中载荷列阵

$$\mathbf{P}_j = \sum_j P_j [\mathbf{N}^e(\xi_j)]^T \quad (11)$$

式中, P_j 为集中载荷。

扭转杆与轴力杆类似,本文不再赘述。为验证所构造轴力杆单元的正确性,采用算例 1 进行了计算。

算例 1 图 4 所示为一等截面直杆,沿轴线均布载荷为 $f(x)=1$ 。

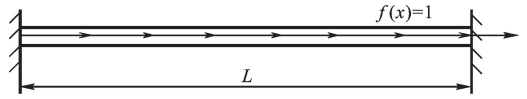


图 4 两端固定直杆

Fig. 4 Straight bar with two ends fixed

采用 1 个 SGW4 小波杆单元进行计算,并与理论解进行对比,结果如表 2 所示。由表 2 可以看出,在计算点处,位移和应变的最大相对误差分别为 0.059%、0.6%,可见所构造轴力杆单元在计算变形时有很高的计算精度。计算应变时精度稍低,这是由拟合函数与原函数之间误差引起的。

表 2 SGW4 小波杆单元求解结果及其精度

Table 2 Results and its accuracy of SGW4 wavelet element

x	变形 理论值 L^2/EA	变形 计算值 L^2/EA	相对 误差/ %	应变 理论值 L^2/EA	应变 计算值 L^2/EA	相对 误差/ %
0	0	0	0	0.5	0.4980	0.4
$L/5$	0.08	0.080047	0.059	0.3	0.3003	0.1
$2L/5$	0.12	0.11998	0.017	0.1	0.09941	0.6
$3L/5$	0.12	0.11998	0.017	-0.1	-0.09941	0.6
$4L/5$	0.08	0.8004	0.059	0.3	-0.3003	0.1
L	0	0	0	-0.5	-0.4980	0.4
理论解	$u_s = \frac{L^2}{2EA}(\xi - \xi^2),$ $\xi = \frac{x}{L} \in [0, 1]$			$\varepsilon(x) = \frac{L^2}{2EA}(1 - 2\xi),$ $\xi = \frac{x}{L} \in [0, 1]$		

2.2 Euler-Bernoulli 梁单元

在构造 SGWN Euler-Bernoulli 梁单元时,单元求解域被等间隔分成 $n=2N-6$ 个部分,其单元节点总数为 $n+1$,节点总自由度数 $n+4$,构造的单元如图 5 所示。

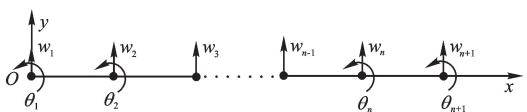


图 5 小波 Euler-Bernoulli 梁单元

Fig. 5 Wavelet Euler-Bernoulli beam element

单元位移函数可表示为

$$\mathbf{w} = \Phi \mathbf{a}^e \quad (12)$$

其中

$$\Phi = [\varphi(\xi+N-2), \varphi(\xi+N-3), \cdots, \varphi(\xi-N+1)],$$

$$\boldsymbol{a}^e = [a_1, a_2, \cdots, a_{2N-2}]^T.$$

对于已经确定节点,有

$$\boldsymbol{w}_1^e = [w(\xi_1), w(\xi_2), \cdots, w(\xi_n), w(\xi_{n+1})]^T. \tag{13}$$

在梁弯曲问题分析中,不仅要求相邻单元公共节点位移相同,还要求公共节点处截面转角相同,为便于与轴力杆、扭转杆构造平面刚架、空间梁单元,对于第 2、n 个节点也有转角自由度,对于 Euler-Bernoulli 梁,截面转角等于位移的导数,即

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{l} \frac{dw}{d\xi} = \frac{1}{l} \boldsymbol{\Phi}'^e \boldsymbol{a}^e. \tag{14}$$

令 $\boldsymbol{w}^e = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, \cdots, w_n, \theta_n, w_{n+1}, \theta_{n+1}]^T$, 则应有

$$\boldsymbol{w}^e = \left[\boldsymbol{\Phi}(\xi_1), \frac{1}{l} \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_2), \frac{1}{l} \times \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_2}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_3), \cdots, L, \boldsymbol{\Phi}(\xi_{n-1}), \boldsymbol{\Phi}(\xi_n), \frac{1}{l} \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_n}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_{n+1}), \frac{1}{l} \times \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_{n+1}} \right]^T \boldsymbol{a}^e. \tag{15}$$

则式(15)可写为

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{N}_w^e \boldsymbol{w}^e. \tag{16}$$

其中

$$\boldsymbol{N}_w^e = \boldsymbol{\Phi}[\boldsymbol{\varphi}^e]^{-1},$$

$$\boldsymbol{\varphi}^e = \left[\boldsymbol{\Phi}(\xi_1), \frac{1}{l} \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_2), \frac{1}{l} \times \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_2}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_3), \cdots, L, \boldsymbol{\Phi}(\xi_{n-1}), \boldsymbol{\Phi}(\xi_n), \frac{1}{l} \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_n}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_{n+1}), \frac{1}{l} \times \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_{n+1}} \right]^T$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi_1), \frac{1}{l} \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_2), \frac{1}{l} \times \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_2}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_3), \cdots, L, \boldsymbol{\Phi}(\xi_{n-1}), \boldsymbol{\Phi}(\xi_n), \frac{1}{l} \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_n}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_{n+1}), \frac{1}{l} \times \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_{n+1}} \Big]^T$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\xi_1), \frac{1}{l} \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_2), \frac{1}{l} \times \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_2}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_3), \cdots, L, \boldsymbol{\Phi}(\xi_{n-1}), \boldsymbol{\Phi}(\xi_n), \frac{1}{l} \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_n}, \boldsymbol{\Phi}(\xi_{n+1}), \frac{1}{l} \times \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_{n+1}} \Big]^T$$

表 3 两端简支等截面梁位移分析

Table 3 Displacement analysis of constant section beam with simply support of both ends

x	变形理论解 uEI/L^4	小波单元 uEI/L^4	相对 误差/%	转角理论解 uEI/L^3	小波单元 uEI/L^3	相对 误差/%
0	0	0	0	0.0416667	0.0416667	0
$L/5$	0.0077333	0.0077332	0.0013	0.033	0.0330017	0.0052
$2L/5$	0.0124	0.0124001	0.0008	0.0123333	0.0123308	0.020
$3L/5$	0.0124	0.0124001	0.0008	0.0123333	0.0123308	0.020
$4L/5$	0.0077333	0.0077332	0.0013	0.033	0.0330017	0.0052
L	0	0	0	0.4166667	0.4166667	0
理论解 ^[12] $w = \frac{L^4}{24EI} [\xi - 2\xi^3 + \xi^4], \xi = \frac{x}{L}$ $\theta = \frac{L^3}{24EI} [1 - 6\xi^2 + 4\xi^3]$						

算例 3 若将上述算例中边界条件改为左端固定,右端自由,采用 1 个 SGW6 Euler-Bernoulli 梁单元的计算值与理论值如表 4 所示。

从表 3 可以看出,在计算点处,位移和转角的最

$$\frac{1}{l} \frac{d\boldsymbol{\Phi}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_{n+1}} \Big]^T.$$

则单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{EI}{l_e^3} \int_0^1 \left(\frac{d^2 \boldsymbol{N}_w^e}{d\xi^2} \right)^T \left(\frac{d^2 \boldsymbol{N}_w^e}{d\xi^2} \right) d\xi. \tag{17}$$

式中, EI 为抗弯刚度。

单元分布载荷列阵为

$$\boldsymbol{P} = l_e \int_0^1 f(\xi) (\boldsymbol{N}^e)^T d\xi. \tag{18}$$

单元集中载荷列阵为

$$\boldsymbol{P}_j = \sum_j P_j [\boldsymbol{N}_w^e(\xi_j)]^T. \tag{19}$$

集中弯矩作用下的载荷列阵为

$$\boldsymbol{M}_k = \frac{1}{l_e} \sum_k M_k \left[\frac{d\boldsymbol{N}_w^e(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_k}^T. \tag{20}$$

式中, M_k 为集中弯矩。

为验证所构造的 Euler-Bernoulli 梁单元的精度,采用算例 2 及算例 3 进行了计算。

算例 2 长度为 L 的等截面梁,抗弯刚度为 EI ,两端简支,受分布载荷 $q(x) = 1$,如图 6 所示。

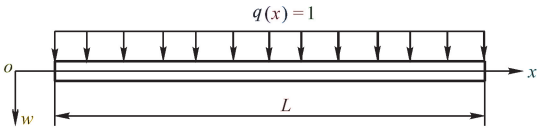


图 6 两端简支等截面 Euler 梁

Fig. 6 Constant section Euler beam with simply support of both ends

采用 1 个建立的 SGW6 Euler-Bernoulli 梁单元进行计算,结果见表 3。

大相对误差分别为 $1.3 \times 10^{-3} \%$ 、 $2.0 \times 10^{-2} \%$,从表 4 可以看出,在计算点处,位移和转角的最大相对误差分别为 $5.7 \times 10^{-4} \%$ 、 $1.5 \times 10^{-2} \%$,可见所构造 SGW6 Euler-Bernoulli 梁单元有较高的计算精度。

表 4 一端固定一端自由等截面梁位移分析

Table 4 Displacement analysis of constant section beam with one fixed end and one free end

x	变形理论解 uEI/L^4	小波单元 uEI/L^4	相对 误差/%	转角理论解 uEI/L^3	小波单元 uEI/L^3	相对 误差/%
0	0	0	0	0	0	0
$L/5$	0.008 733 33	0.008 733 28	0.000 57	0.081 333 3	0.081 332 8	0.000 6
$2L/5$	0.030 4	0.030 400 1	0.000 33	0.130 667	0.130 666	0.000 8
$3L/5$	0.059 4	0.059 400 0	0	0.156	0.156 002	0.001 3
$4L/5$	0.091 733 3	0.091 733 2	0.000 11	0.165 333	0.165 330 8	0.015
L	0.125	0.125 000	0	0.166 667	0.166 667	0
理论解	$w = \frac{L^4}{24EI} [6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4]$			$\theta = \frac{L^3}{24EI} [12\xi - 12\xi^2 + 4\xi^3]$		

2.3 平面刚架单元

SGW 小波平面刚架单元由一个 SGW4 轴力杆单元和一个 SGW6 Euler-Bernoulli 梁单元组成,单元节点数为 6,轴力杆对应的自由度为 u_i , xoy 平面的梁单元对应的自由度为 w_i 、 θ_i ,编号为 1、2、5、6 的节点处有 3 个自由度: u_i 、 w_i 、 θ_i ,其余节点有 2 个自由度: u_i 、 w_i ,每个单元共有 16 个自由度,如图 7 所示。

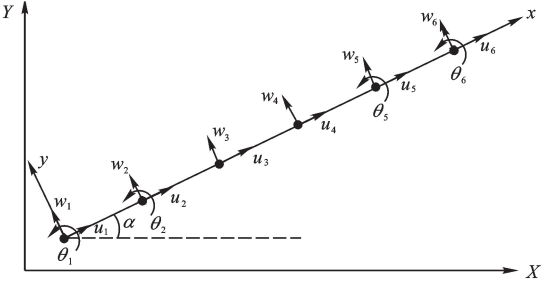


图 7 平面刚架单元节点排列及局部和整体坐标系
Fig. 7 Plane frame element node arrangement and local and global coordinate system

由于刚架内各单元的局部坐标方向各不相同,分析时需要将单元特性矩阵转换到统一的整体坐标系才能按单元叠加,单元局部坐标与整体坐标之间的关系为

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & & & & & \\ & g_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & g_5 & & \\ & & & & g_6 \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中

$$g_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 5, 6;$$
$$g_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, i = 3, 4.$$

式中, α 为单元坐标系 x 轴与整体坐标系 X 轴之间的夹角。

算例 4 如图 8 所示平面刚架,各杆件面积 $A = 76.3 \text{ cm}^2$,惯性矩 $I = 15\,760 \text{ cm}^4$,弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ 。均布载荷 $q = 60 \text{ kN/m}$ 作用在水平杆 BC 上。

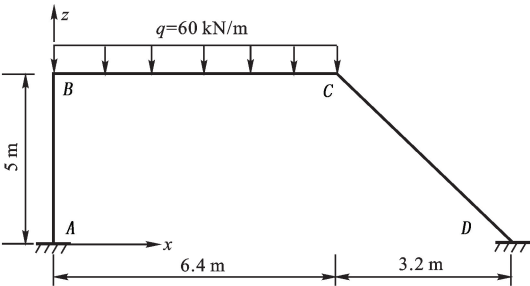


图 8 受分布力作用的平面刚架
Fig. 8 Force distribution of plane rigid frame

用传统刚架单元对该问题进行了分析^[13],本文采用 3 个 SGW 小波刚架单元进行分析,B、C 两节点位移见表 5。

表 5 平面刚架位移分析

Table 5 Plane frame displacement analysis

节点	S_x/mm		S_z/mm	
	小波单元	普通单元	小波单元	普通单元
B	-20.764 9	-20.767 6	-0.748 677	-0.748 692
C	-21.161 1	-21.163 7	-14.383 2	-14.384 9

由表 5 可以看出,本文中构造的第二代小波单元刚架单元具有很高的精度,用来进行平面刚架分析是非常有效的。

2.4 空间梁单元

SGW 小波空间梁单元由 SGW4 轴力杆单元、SGW4 扭转杆单元和 SGW6 Euler-Bernoulli 梁单元组成,单元节点数为 6,轴力杆对应的自由度为 u_i ,扭转杆对应的自由度为 θ_{ix} , xoy 平面梁单元对应的自由度为 v_i 、 θ_{iy} , xoz 平面梁单元对应的自由度为 w_i 、 θ_{iz} ,在单元中 1、2、5、6 节点有 6 个自由度: u_i 、 v_i 、 w_i 、 θ_{ix} 、 θ_{iy} 、 θ_{iz} ,其余节点有 4 个自由度: u_i 、 v_i 、 w_i 、 θ_{ix} ,每个单元共有 32 个自由度,如图 9 所示。

由于空间梁内各单元的局部坐标方向各不相

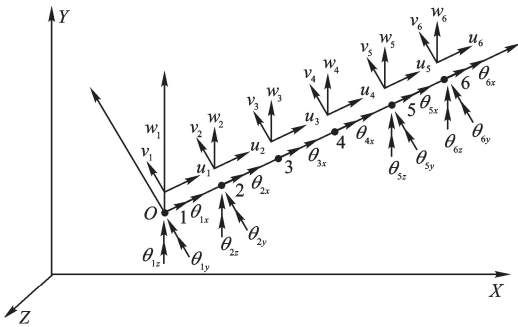


图9 SGW 空间梁单元

Fig.9 SGW space beam element

同,分析时须将单元特性矩阵转换到统一的整体坐标系才能按单元叠加,在进行矩阵转换之前采用凝聚自由度的方法将 θ_{3x} 、 θ_{4x} 去掉。

单元局部坐标与整体坐标之间的关系为

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_{n-1} \\ & & & & g_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中

$$g_i = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & l_{zZ} \end{bmatrix}, i = 1, 2, 5, 6;$$

$$g_i = \begin{bmatrix} l_{xX} & l_{xY} & l_{xZ} \\ l_{yX} & l_{yY} & l_{yZ} \\ l_{zX} & l_{zY} & l_{zZ} \end{bmatrix}, i = 3, 4.$$

式中, l_{xX} 、 l_{xY} 、 l_{xZ} 为局部坐标 x 与整体坐标 X 、 Y 、 Z 的3个方向余弦; l_{yX} 、 l_{yY} 、 l_{yZ} 和 l_{zX} 、 l_{zY} 、 l_{zZ} 分别为局部坐标系 y 、 z 与整体坐标 X 、 Y 、 Z 的三个方向余弦。

算例 5 图 10 所示为一空间刚架结构。该刚架由 12 个梁组成,横截面面积为 $0.01 \times 0.01 \text{ m}^2$,梁的弹性模量为 210 GPa,质量密度为 7860 kg/m^3 ,在刚架上部 7 节点沿 y 方向作用有 -1 kN 的横向载荷,并受到 $-1000 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的扭矩。分别用 608 个普通梁单元^[9]和 12 个 SGW 空间梁单元进行了计算,计算结果如表 6、7 所示。

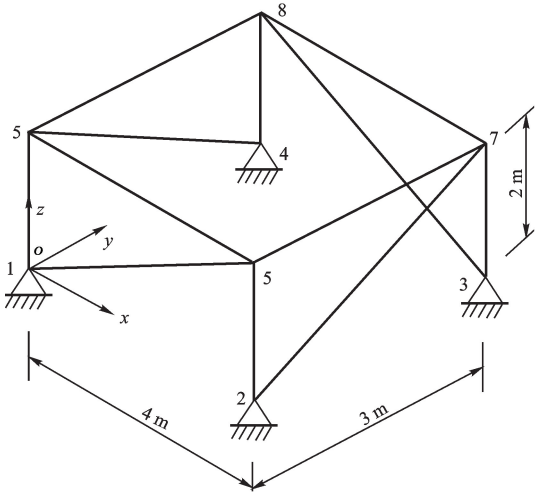


图10 空间刚架结构示意图

Fig.10 Schematic diagram of space frame structure

表 6 空间刚架小波单元计算结果

Table 6 Results of calculation of space frame structure with wavelet element

节点	u/mm	v/mm	w/mm	$\theta_x/(\text{^\circ})$	$\theta_y/(\text{^\circ})$	$\theta_z/(\text{^\circ})$
节点 5	-2.585627	1.301454	-3.297535	5.462827×10^{-4}	2.381413×10^{-2}	-7.074244×10^{-3}
节点 7	-3.752672	-2792.203	589.8550	-1.248196	-2.394244×10^{-2}	-7.690163×10^{-3}

表 7 空间刚架普通单元计算结果

Table 7 Results of calculation of space frame structure with traditional element

节点	u/mm	v/mm	w/mm	$\theta_x/(\text{^\circ})$	$\theta_y/(\text{^\circ})$	$\theta_z/(\text{^\circ})$
节点 5	-2.585605	1.301436	-3.297536	5.462693×10^{-4}	2.381413×10^{-2}	-7.074238×10^{-3}
节点 7	-3.752654	-2792.185	589.8510	-1.248196	-2.394244×10^{-2}	-7.690157×10^{-3}

由表 6、7 可以看出,构造的 SGW 小波空间梁单元与普通空间梁单元计算结果相近,从而说明所构造的 SGW 小波梁单元计算精度是相当高的。通过新方法进行处理,进行有限元计算时具有较高的精度,同时也避免了繁琐的计算。

3 结 论

(1) 针对第二代小波无显式表达式的缺点,提出了采用 PsdVoigt2 函数进行拟合,从相关系数以及构造的单元的计算精度来看,利用该方法进行拟合

是合理的。

(2)构造的第二代小波杆梁单元计算精度较高,丰富了小波有限元法单元库。

参考文献:

- [1] 郑秋梅,杨发科,蒋晓红.一种基于关系的小波域水印算法[J].中国石油大学学报:自然科学版,2009,33(2):164-167.
ZHENG Qiumei, YANG Fake, JIANG Xiaohong. A digital watermarking algorithm based upon relationship in wavelet transform domain[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2009, 33(2): 164-167.
- [2] 陈敬龙,张来斌,段礼祥,等.基于提升小波包的往复压缩机活塞-缸套磨损故障诊断[J].中国石油大学学报:自然科学版,2011,35(1):130-134.
CHEN Jinglong, ZHANG Laibin, DUAN Lixiang, et al. Diagnosis of reciprocating compressor piston-cylinder liner wear fault based on lifting scheme packet[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2011, 35(1): 130-134.
- [3] 何正嘉,陈雪峰.小波有限元理论研究与应用进展[J].机械工程学报,2005,41(3):1-11.
HE Zhengjia, CHEN Xuefeng. Advances in theory study and engineering application of wavelet finite element[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(3): 1-11.
- [4] LILLIAM A D, MARIA T M, VICTORIA V. Daubechies wavelet beam and plate finite elements[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2009, 45(10): 200-209.
- [5] 周又和,王记增,郑晓静.小波伽辽金法有限元法在梁板结构中的应用[J].应用数学和力学,1998,19(8):

697-706.

ZHOU Youhe, WANG Jizeng, ZHENG Xiaojing. Applications of wavelet Galerkin FEM to bending of beam and plate structures[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 19(8): 697-706.

- [6] 向家伟,陈雪峰,李兵,等.一维区间B样条小波单元的构造研究[J].应用力学学报,2006,23(2):222-227.
XIANG Jiawei, CHEN Xuefeng, LI Bing, et al. Construction of one-dimensional elements with B-spline wavelet[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2006, 23(2): 222-227.
- [7] MA Junxing, XUE Jijun, HE Zhengjia, et al. A study of the construction and application of a Daubechies wavelet-based beam element[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39(10): 965-975.
- [8] 马军星. Daubechies 小波有限元理论及工程应用研究[D].西安:西安交通大学机械工程学院,2003.
MA Junxing. Study of daubechies wavelet finite element theory and engineering application[J]. Xi'an: College of Mechanical Engineering in Xi'an Jiaotong University, 2003.
- [9] 何正嘉,陈雪峰,李兵,等.小波有限元理论及其工程应用[M].北京:科学出版社,2006.
- [10] 何正嘉,陈进,王太勇,等.机械故障诊断理论及应用[M].北京:高等教育出版社,2010.
- [11] 王勖成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社,2003.
- [12] 刘鸿文.材料力学[M].北京:高等教育出版社,1996.
- [13] 王元汉,李丽娟.有限元法基础与程序设计[M].广州:华南理工大学出版社,2001.

(编辑 沈玉英)